9. R, RE még mindig

1. Álljon az L nyelv az olyan Turing-gépek kódjaiból, amelyek csak páros hosszú szavakat fogadnak el. Igaz-e, hogy L

   a) rekurzív?

   b) rekurzívan felsorolható?

   c) co RE-ben van?

   Megoldás:

   a) Nem igaz. Legyen $T = \{L : w \in L \implies |w| \text{ páros } \}$. Ez a nyelvi tulajdonság nem triviális, hiszen van rá pozitív példa, pl. $L_1 = \{\texttt{00}\}$, ami valóban RE-ben is van, hiszen egy véges nyelv reguláris, és ezért rekurzív, ami miatt RE-ben is benne van. (Közvetlenül sem nehéz megadni hozzá egy TG-t.) Negatív példának jó pl. az $L_2 = \{\texttt{0}\} \in \text{RE}$ hasonló okok miatt.

   Megmutatjuk, hogy c) igaz, és ebből már következik, hogy b) nem igaz, hiszen ha egy nyelv RE-ben és co RE-ben is benne van, akkor rekurzív is, ami az a) szerint nem teljesül.

   c) $L \in \text{co RE}$ pontosan akkor, ha $\overline{L} \in \text{RE}$, azaz van olyan TG, ami az $\overline{L}$ nyelvet ismeri fel. $\overline{L}$ elemei a nem TG kódok és azok a w TG kódok, melyekre M_w elfogad legalább egy páratlan hosszú szót is. Az M gép lényegében egy ilyen páratlan hosszú szót keres. M egy w bemeneten

   - ellenőrzi, hogy w TG kód-e. Ha nem, akkor M álljon meg elfogadó állapotban.
   - A szokott módon sorban előállítja az (s,i) párokat, ahol s páratlan hosszú szó, $i = 1, 2, \ldots$. Az M_w gépet az s szón i lépésig futtatja. Ha ez alatt M_w elfogad, akkor M álljon meg elfogadó állapotban, különben vegye a következő párt.

   Ha M_w elfogad egy páratlan hosszú s szót, akkor, amint M az (s,i) párhoz ér egy megfelelő i értékkel, akkor M elfogadja a w szót. Különben meg, ha nincs ilyen s szó, akkor M nem áll meg. Ezért $L(M) = L$.

2. Rekurzív-e az $L = \{w : w \text{ Turing-gép kód és } L(M_w) = L_u\}$ nyelv?

   Megoldás: Az, hogy egy nyelv épp az L_u, egy nyelvi tulajdonság, $T = \{L : L = L_u\}$. Nem triviális, hiszen $L_1 = L_u \in \text{RE}$ rendelkezik a tulajdonsággal, míg mondjuk $L_2 = \emptyset \in \text{RE}$ nem. Ezért a Rice-tételből következik, hogy $L = L_T \notin \text{R}$.

3. Tekintsük a dominóproblémának azt a változatát, amikor csak egy típus van (de abból persze végtelen sok darab). Rekurzív-e az így módosított problémához tartozó nyelv?

   Megoldás: Egy $\{(a,b,c,d)\}$ készlettel pontosan akkor fedhető le a sík, ha ezek egymás mellé és egymás alá is rakhatók. Azaz, ha $b = d$ és $a = c$. Ezt ellenőrizni véges eljárás, tehát ez a változat rekurzív.

4. Tekintsük a dominóproblémának azt a változatát, amikor minden dominót a vízszintes és a függőleges tengelyre is szabad tükrözni. Rekurzív-e az így módosított problémához tartozó nyelv?

   Megoldás: Igen, mert így minden nem üres készlet jó. Igazából egyetlen típus is elég, mert akármilyen (a,b,c,d) dominó esetén egy vízszintes sáv lefedhető a dominó és a függőleges tengelyre vett tükörkép váltakozásával. Ez alá egy olyan sáv jöhet, amik a mindig a felettük levők vízszintes tengelyre vett tükörképei. És ezt a következő sávokra is alkalmazhatjuk.

5. Igazolja, hogy rekurzív a PCP-nek az a változata, amikor csak egyetlen szópár adott $(k = 1)$!

   Megoldás: Minden jó indexsorozat valahány 1-ből áll, azaz $s_1^k = t_1^k$ valamilyen $k \geq 1$ számra. Mivel a két oldal hossza azonos, ezért $|s_1^k| = |t_1^k|$ és így $|s_1| = |t_1|$ is igaz. Ekkor $k = 1$ is megoldás kell legyen, azaz $s_1 = t_1$ is teljesül. Ha pedig $s_1 \neq t_1$, akkor nincs megoldás. Az pedig, hogy s_1 és t_1 megegyezik-e véges lépésben eldönthető Turing-géppel, tehát ez a változat valóban rekurzív.

6. Rekurzív-e a PCP-nek az a változata, amikor minden szópárra $|s_i| = |t_i|$ teljesül?

   Megoldás: Igen. Mert ilyenkor a megoldhatóság szükséges és elégséges feltétele az, hogy legyen olyan szópár, amire $s_i = t_i$.

7. Rekurzív-e a PCP-nek az a változata, amikor minden szópár legfeljebb egyszer használható?

   Megoldás: Igen, hiszen ilyenkor csak véges sok lehetőség van (n szópár esetén kevesebb, mint $(n+1)^n$), ezeket sorban ki tudjuk próbálni egy Turing-géppel, hogy jó megoldást adnak-e. Ez egy véges eljárás.

8. Legyen $((s_1,t_1),\ldots,(s_n,t_n);m) \in L$ az olyan esetekben, amikor az (s_i,t_i) párok által meghatározott Post megfeleltetési problémának van legfeljebb m hosszú indexsorozatból álló megoldása. Mutassa meg, hogy az L nyelv rekurzív!

   Megoldás: Az előzőhöz hasonlóan, a legfeljebb m hosszú indexsorozatok száma véges, (kevesebb, mint $(n+1)^m$), ezek mindegyikét végig lehet próbálni.

. . . .