5. CF nyelvtanok átalakítása. Veremautomata. Környezetfüggetlen pumpálás

1. A tanult módszerrel küszöbölje ki az ε-szabályokat az alábbi nyelvtanokból!
   (a) $S \to S\mathtt{a}S\mathtt{b} \mid \epsilon$
   (b) $S \to ABC, \quad A \to BB \mid \varepsilon, \quad B \to CC \mid \mathtt{a}, \quad C \to AA \mid \mathtt{b}$

Megoldás:

(a) S-ből megkapható az ε, ezért kell egy új kezdőváltozó is.

$$S' \to \varepsilon \mid S \qquad S \to S\mathtt{a}S\mathtt{b} \mid \mathtt{a}S\mathtt{b} \mid S\mathtt{ab} \mid \mathtt{ab}$$

(b) Elenyésző változók meghatározása: $E_1 = \{A\}$, $E_2 = \{A, C\}$, $E_3 = \{A, B, C\}$, $E_4 = \{A, B, C, S\} = E$.

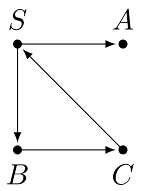
Az új nyelvtan:

$$\begin{aligned} S' &\to \varepsilon | S \\ S &\to ABC \mid BC \mid AC \mid AB \mid A \mid B \mid C \\ A &\to BB \mid B \\ B &\to CC \mid C \mid \mathtt{a} \\ C &\to AA \mid A \mid \mathtt{b} \end{aligned}$$

2. A tanult módszerrel szüntesse meg az egyszeres szabályokat a következő nyelvtanban!

$$S \to A \mid B \qquad A \to \mathtt{a}S\mathtt{b} \mid \mathtt{a} \qquad B \to S\mathtt{b} \mid C \qquad C \to S\mathtt{a} \mid S$$

Megoldás: Az egyszeres szabályok gráfja:



Látszik, hogy az S, B, C változókból mind a 4 csúcs elérhető, A-ból egyetlen más csúcs sem. Az új nyelvtan:

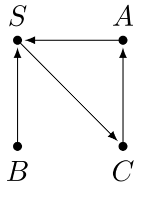
$$S \to \mathtt{a}S\mathtt{b} \mid \mathtt{a} \mid S\mathtt{b} \mid S\mathtt{a} \qquad A \to \mathtt{a}S\mathtt{b} \mid \mathtt{a} \qquad B \to \mathtt{a}S\mathtt{b} \mid \mathtt{a} \mid S\mathtt{b} \mid S\mathtt{a} \qquad C \to \mathtt{a}S\mathtt{b} \mid \mathtt{a} \mid S\mathtt{b} \mid S\mathtt{a}$$

(A kapott nyelvtanban vannak felesleges szimbólumok, ezek kiküszöbölése további feladat lehet.)

3. A tanult módszerrel alakítsa át a következő nyelvtant olyanra, amelyben már nincsenek egyszeres szabályok és felesleges szimbólumok!

$$S \to \mathtt{a}A \mid B\mathtt{b} \mid C \qquad A \to A\mathtt{b} \mid S \qquad B \to \mathtt{c} \mid S \qquad C \to A \mid \mathtt{cc}$$

Megoldás: Előbb az egyszeres szabályoktól szabadulunk meg. Ezek gráfja:



Látszik, hogy ebben B-ből minden, az S, A, C változókból B kivételével minden elérhető.

Ennek megfelelően az új nyelvtan:

$$\begin{aligned}
S &\to \mathtt{a}A \mid B\mathtt{b} \mid A\mathtt{b} \mid \mathtt{cc} \\
A &\to \mathtt{a}A \mid B\mathtt{b} \mid A\mathtt{b} \mid \mathtt{cc} \\
C &\to \mathtt{a}A \mid B\mathtt{b} \mid A\mathtt{b} \mid \mathtt{cc} \\
B &\to \mathtt{c} \mid \mathtt{a}A \mid B\mathtt{b} \mid A\mathtt{b} \mid \mathtt{cc}
\end{aligned}$$

1. típusú felesleges változók megtalálásához: $T_0 = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$ $T_1 = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, S, A, B, C\} = T_2$. Mivel T_2 minden szimbólumot tartalmaz, ezért ilyen típusú felesleges nincs.

2. típus: $S_0 = \{S\}$, $S_1 = \{S, \mathtt{a}, A, B, \mathtt{b}, \mathtt{c}\} = S_2$. Tehát C felesleges, a nélküle kapott nyelvtan:

$$\begin{aligned}
S &\to \mathtt{a}A \mid B\mathtt{b} \mid A\mathtt{b} \mid \mathtt{cc} \\
A &\to \mathtt{a}A \mid B\mathtt{b} \mid A\mathtt{b} \mid \mathtt{cc} \\
B &\to \mathtt{c} \mid \mathtt{a}A \mid B\mathtt{b} \mid A\mathtt{b} \mid \mathtt{cc}
\end{aligned}$$

(Ebben már nincs a definíció értelmében felesleges változó, de kisebb nyelvtan ettől még lehetséges!)

4. A tanult módon szüntesse meg a felesleges szimbólumokat az alábbi környezetfüggetlen nyelvtanban!

$$\begin{aligned}
S &\to AB \mid AC \\
A &\to \mathtt{a}A\mathtt{b} \mid \mathtt{b}A\mathtt{a} \mid \mathtt{a} \\
B &\to \mathtt{b}AB \mid \mathtt{aa}B \mid B\mathtt{a}D \\
C &\to \mathtt{ab}C\mathtt{a} \mid \mathtt{a}BC \mid \mathtt{ba} \\
D &\to \mathtt{b}D \mid \mathtt{a}C\mathtt{a}
\end{aligned}$$

Megoldás: Az 1. típusú felesleges szimbólumok (nem tűnnek el) kiszűrése:

$$T_0 = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\} \qquad T_1 = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, A, C\} \qquad T_2 = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, A, C, S, D\} = T_3,$$

azaz B felesleges, tehát minden B-t tartalmazó szabályt el kell hagyni. Ennek eredménye:

$$\begin{aligned}
S &\to AC \\
A &\to \mathtt{a}A\mathtt{b} \mid \mathtt{b}A\mathtt{a} \mid \mathtt{a} \\
C &\to \mathtt{ab}C\mathtt{a} \mid \mathtt{ba} \\
D &\to \mathtt{b}D \mid \mathtt{a}C\mathtt{a}
\end{aligned}$$

A 2. típusú felesleges szimbólumok (nem elérhetők) kiszűrése az előbb kapott nyelvtanból:

$$S_0 = \{S\} \qquad S_1 = \{S, A, C\} \qquad S_2 = \{S, A, C, \mathtt{a}, \mathtt{b}\} = S_3,$$

azaz D felesleges, tehát minden D-t tartalmazó szabályt el kell hagyni. A felesleges szimbólumok nélküli nyelvtan:

$$\begin{aligned}
S &\to AC \\
A &\to \mathtt{a}A\mathtt{b} \mid \mathtt{b}A\mathtt{a} \mid \mathtt{a} \\
C &\to \mathtt{ab}C\mathtt{a} \mid \mathtt{ba}
\end{aligned}$$

(Ebből egyszerűbb meghatározni a generált nyelvet is, ugye?)

5. Igazolja, hogy ha egy CF nyelvtanból először az ε-szabályokat küszöböljük ki, utána az egyszeres szabályokat, majd az 1. típusú felesleges szimbólumokat, végül a 2. típusú felesleges szombólumokat is, akkor a kapott nyelvtanban se ε-szabály (kivéve az esetleges $S \to \varepsilon$ szabályt), se egyszeres szabály, se felesleges szimbólum nem lesz!

   Megoldás: Az egyszeres szabályok kiküszöbölésekor csak a korábban meglevő jobb oldalakat rendeljük más változókhoz is, tehát ha nem volt ε-szabály, akkor ilyen nem is keletkezik.

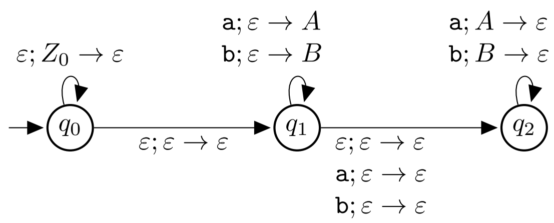
   A felesleges szabályok kiküszöbölésekor csak törlünk néhány szabályt, újat nem adunk hozzá a nyelvtanhoz, ezért nem keletkezhet új ε-szabály vagy egyszeres szabály.

   Még azt kell látni, hogy a 2. típusú feleslegesek törlésekor nem keletkezik 1. típusú. Ez meg azért van, mert ha a nyelvtan minden változójából levezethető szó, akkor minden, a kezdőváltozóból elérhető változóból indulva, egy szó levezetésekor felhasznált változók is elérhetők a kezdőváltozóból, azaz ezek nem feleslegesek, nem lesznek törölve, így továbbra is levezethető marad a szó.

6. Legyen $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$. Adjon üres veremmel elfogadó veremautomatát a Σ feletti palindromok nyelvéhez! (Palindrom az, ami visszafelé olvasva is ugyanúgy néz ki, pl. ε, `aba`, `aa`.)

   Megoldás: Az ötlet, hogy eleinte az olvasott karaktereket berakjuk a verembe (q_1 állapot), majd egy pont után, ha azt olvassuk, amit a verem tetejéről leszedtünk, akkor tovább lépünk, különben a számítás elakad (q_2 állapot). Azt, hogy mikor kell váltani nem kell tudnunk – erre jó a nemdeterminisztikus automata. Ahhoz, hogy a palindormoknál a végén kiürüljön a verem, érdemes még az elején a verem alját jelző szimbólumot kidobni (q_0 állapot). Ez azért is jó ötlet, mert az üres szó is palindrom.

   Például három állapottal egy lehetséges megvalósítás, amiben azért, hogy a struktúra még világosabb legyen (és kevesebbet kelljen írni), a $q_0 \to q_1$ átmenetben semmi nem történik a bemeneten és a veremben. A $q_1 \to q_2$ átmenet viszont kezeli a páratlan hosszú palindromok esetét – mindegy, hogy a középső karakter micsoda.



   Az üres szó esetén a verem kiürül q_0-ban, és bár tovább tud lépni q_1-be, majd q_2-be, a verem végig üres marad, tehát a számítás elfogadó. Nem üres szónál hiába ürül ki a verem q_0-ban, tovább kell lépnie, hiszen még nem olvasta el a szót. Ha nem a szó felénél lép át q_2-be, akkor vagy még a szó vége előtt kiürül a verem, és a számítás elakad, vagy nem ürül ki a verem és így egyik esetben sem fogad el. Szintén elakad ha ugyan jókor vált, de a szó nem palindrom.

7. A tanult módon készítsen üres veremmel elfogadó veremautomatát a következő nyelvtanhoz! Mi a nyelvtan által generált nyelv?

$$S \to XY \qquad X \to XV \mid \mathtt{b} \qquad Y \to UY \mid \mathtt{a} \qquad U \to \mathtt{a} \qquad V \to \mathtt{bb}$$

   Megoldás: A veremautomatának egyetlen q állapota lesz, ami egyben a kezdőállapot is. A veremben kezdetben bent levő szimbólum feleljen meg az S változónak Az átmenetek:

$$\delta(q, \varepsilon, S) = \{(q, XY)\} \qquad \delta(q, \varepsilon, X) = \{(q, XV), (q, \mathtt{b})\} \qquad \delta(q, \varepsilon, Y) = \{(q, UY), (q, \mathtt{a})\}$$

$$\delta(q, \varepsilon, U) = \{(q, \mathtt{a})\} \qquad \delta(q, \varepsilon, V) = \{(q, \mathtt{bb})\}$$

$$\delta(q, \mathtt{a}, \mathtt{a}) = \{(q, \varepsilon)\} \qquad \delta(q, \mathtt{b}, \mathtt{b}) = \{(q, \varepsilon)\}$$

   A generált nyelvhez előbb vegyük észre, hogy az Y-ból megkapható szavak halmaza az $\mathtt{aa}^*$, X-ből pedig a páratlan hosszú `b`-sorozatok kaphatók meg. Mivel a teljes nyelvtan által generált nyelv az előző kettő konkatenáltja, ezért $L = \{\mathtt{b}^{2n-1}\mathtt{a}^k : n, k \geq 1\}$.

8. Legyen $L = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n\mathtt{c}^n : n \geq 0\}$. Igazolja, hogy L komplementere környezetfüggetlen!

Megoldás: Az $\overline{L}$ nyelv szavai 4 osztályba sorolhatók:

- nem $\mathtt{a}^*\mathtt{b}^*\mathtt{c}^*$ alakúak, $L_g = \overline{\mathtt{a}^*\mathtt{b}^*\mathtt{c}^*}$,
- $L_{ab} = \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^j\mathtt{c}^k : i \neq j,\ i,j,k \geq 0\}$,
- $L_{ac} = \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^j\mathtt{c}^k : i \neq k,\ i,j,k \geq 0\}$,
- $L_{bc} = \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^j\mathtt{c}^k : j \neq k,\ i,j,k \geq 0\}$.

Egy szó több osztályba is beletartozhat, de $\overline{L} = L_g \cup L_{ab} \cup L_{ac} \cup L:bc$ és ezért elég azt megmutatni, hogy ez a 4 nyelv mind CF, mert akkor az uniójuk is.

L_g egy reguláris nyelv komplemetere, ezért reguláris, tehát CF is.

Az L_{ab} nyelvet generáló majdnem CF nyelvtan felhasználja, hogy ez két nyelvből áll, az a-kat és b-ket tartalmazó résznek és $\mathtt{c}^*$-nak az összefűzése. Az első részt lehet úgy generálni, hogy egy ideig egyszerre rakunk le egy a-t és egy b-t, majd egy idő után vagy csak a-kat vagy csak b-ket, így biztosítjuk, hogy valamelyikből több legyen:

$$\begin{aligned} S &\to S_{ab}C \\ C &\to \mathtt{c}C \mid \varepsilon \\ S_{ab} &\to \mathtt{a}S_{ab}\mathtt{b} \mid A \mid B \\ A &\to \mathtt{a}A \mid \mathtt{a} \\ B &\to \mathtt{b}B \mid \mathtt{b} \end{aligned}$$

Az L_{ac} nyelvtana hasonlóan építhető fel. Most a szélén az a-kat és a c-ket generáljuk együtt egy darabig, utána pedig csak a-kat (legalább egyet) és b-ket , vagy csak c-ket (legalább egyet) és b-ket:

$$\begin{aligned} S &\to \mathtt{a}S\mathtt{c} \mid AB \mid BC \\ A &\to \mathtt{a}A \mid \mathtt{a} \\ C &\to \mathtt{c}C \mid \mathtt{c} \\ B &\to \mathtt{b}B \mid \varepsilon \end{aligned}$$

Az L_{bc} az L_{ab} esethez hasonló, csak ott az elején jön a tetszőleges számú karakter:

$$\begin{aligned} S &\to AS_{bc} \\ A &\to \mathtt{a}A \mid \varepsilon \\ S_{bc} &\to \mathtt{b}S_{bc}\mathtt{c} \mid B \mid C \\ B &\to \mathtt{b}B \mid \mathtt{b} \\ C &\to \mathtt{c}C \mid \mathtt{c} \end{aligned}$$

Veremautomatával is egyszerű: pl az L_{ab} nyelvhez amíg az a-k jönnek, belerakunk egy-egy karaktert a verembe, a b-knél meg (egy új állapotban) kiszedegetjük. Ha az első c-nél még van berakott karakter a veremben, az jó, arra persze figyelni kell, hogy után már csak c-ket olvashatunk. Ha pedig még b-t olvasunk, amikor a verem alját jelző szimbólumhoz érünk az jó (de ilyenkor is végig kell menni a bemeneten, hogy ellenőrizzük, a b-k után már csak csupa c jön).

9. Környezetfüggetlenek-e az alábbi nyelvek?
   (a) $L_a = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^k\mathtt{a}^k\mathtt{b}^n : k, n \geq 1\}$
   (b) $L_b = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^k\mathtt{a}^n\mathtt{b}^k : k, n \geq 1\}$
   (c) $L_c = \{\mathtt{a}^m\mathtt{b}^n : 1 \leq m \leq n \leq 2m\}$
   (d) $L_d = \{\mathtt{0}^{n!} : n \geq 1\}$
   (e) $L_e = \{\mathtt{a}^{i_1}\mathtt{b}^{i_1}\mathtt{a}^{i_2}\mathtt{b}^{i_2}\cdots\mathtt{a}^{i_k}\mathtt{b}^{i_k} : k \geq 0,\ i_1, i_2, \ldots, i_k \geq 1\}$

Megoldás:

(a) Igen. Ezt meg lehet mutatni nyelvtannal és veremautomatával is.
Egy lehetséges nyelvtan, ami arra a gondolatra épül, hogy az 1. és 4. blokkot együtt generáljuk a kezdőváltozóból, majd egy új változó segítségével a középső két blokkot: $S \to \mathtt{a}S\mathtt{b} \mid \mathtt{a}T\mathtt{b} \qquad T \to \mathtt{b}T\mathtt{a} \mid \mathtt{ba}$

Egy megfelelő veremautomata vázlata: A kezdő `a` betű olvasásakor egy q_{a1} állapotba lép, és közben egy A-val bővíti a vermet. Ebben az állapotban a további `a` betűkre is ugyanezt csinálja. Az első `b`-re átlép egy q_{b1} állapotba és egy B-vel bővíti a vermet. Ugyanez történik a további `b` betűknél. Innen egy `a` betűre átlép q_{a2}-be, és minden `a` hatására kivesz a veremből egy-egy B-t. Egy `b`-vel q_{b2}-be kerül és innentől minden `b` hatására kivesz egy-egy A-t. Kell még egy $(q_{b2}, \varepsilon, Z_0) \to (q_f, Z_0)$ átmenet, amivel az elfogadó q_f állapotba léphet.

(b) Nem. Tegyük fel, hogy CF és legyen $p > 0$ a pumpálási hossz. Válasszuk a $z = a^p b^p a^p b^p \in L_b$ szót. Világos, hogy $|z| = 4p \geq p$. Vegyük ennek egy tetszőleges, a pumpálási lemma szerinti $z = uvwxy$ felosztását.

Ha v-ben kétféle betű is van, akkor az ismétlésekor a blokkok száma nő, a pumpált változat nem lesz a nyelvben. Ugyanez igaz, amikor x-ben van kétféle betű. Tehát mind a két részszó homogén.

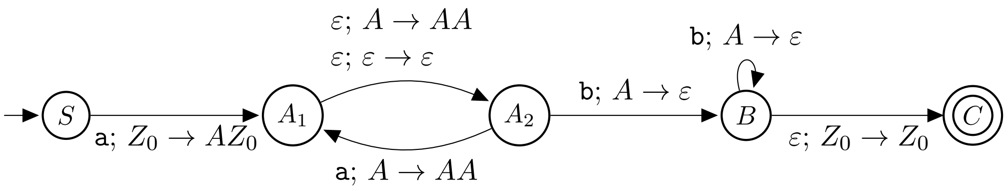
Ha azonos blokkon belül vannak, akkor pumpáláskor ennek a blokknak a hossza változik, de a párjáé nem, ez is kivezet a nyelvből. Ugyanez történik, ha v vagy x az üres szó. (Tudjuk, hogy mindkettő nem lehet üres.)

Még az az eset maradt, hogy v és x különböző blokkokban van és egyik sem üres. Mivel a lemma szerint $|vwx| \leq p$, ez csak két szomszédos blokk lehet. Pumpáláskor ezek hossza változik, de a párjaiké nem, ez sem lesz benne a nyelvben. Azaz ellentmondásra jutottunk, tehát L_b nem CF.

(c) Igen.
A nyelvtan ötlete lehet, hogy szokás szerint a két szélén generáljuk az `a` és `b` betűket, de most egy `a`-val együtt vagy 1 vagy 2 darab `b` betű keletkezik:

$$S \to \mathtt{a}S\mathtt{b} \mid \mathtt{a}S\mathtt{bb} \mid \mathtt{ab} \mid \mathtt{abb}$$

A veremautomata hasonló elven alapulhat: pl. minden `a` betűnél berakunk egy vagy két A szimbólumot a verembe (az utóbbihoz két lépés kell!), az első `b` betűvel átlépünk egy új állapotba, ahonnan kezdve minden `b` betűnél egy A-t szedünk ki. Egy lehetséges megvalósítás:



(d) Nem. Tegyük fel, hogy CF és legyen $p > 0$ a pumpálási hossz. Válasszuk a $z = 0^{p!} \in L_d$ szót. Világos, hogy $|z| = p! \geq p$. Vegyük ennek egy tetszőleges, a pumpálási lemma szerinti $z = uvwxy$ felosztását. Ha $t = |vx|$, akkor $1 \leq t \leq p$. Pumpáláskor a szó hossza $|uv^k wx^k y| = p! + (k-1)t$ lesz. Ez pl. $k = 2$ esetén $p! + t \leq p! + p < (p+1)!$, tehát nem $n!$ alakú, $uv^2wx^2y \notin L_d$, ami ellentmond a pumpálási lemmának, ezért L_d nem CF nyelv.

(e) Igen. Vegyük észre, hogy $L_e = L^*$, ahol $L = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n : n \geq 1\}$. Mivel L CF és a CF nyelvek zártak a tranzitív lezárásra, ezért L_e is CF.
(Természetesen lehet nyelvtant és veremautomatát is adni rá.)

10. Legyen $L = \{\mathtt{a}^{3i}\mathtt{b}^i\mathtt{c}^{2i} : |i \geq 1\}$. Bizonyítsa be, hogy ez az L nyelv nem környezetfüggetlen!

Megoldás: Tegyük fel, hogy CF és legyen $p > 0$ a pumpálási hossz. Válasszuk pl. a $z = \mathtt{a}^{3p}\mathtt{b}^p\mathtt{c}^{2p} \in L$ szót. Ennek hossza $|z| = 6p \geq p$, tehát a szó eleget tesz a pumpálási lemma feltételeinek. Vegyük ennek egy tetszőleges $z = uvwxy$ felosztását.

Ha v nem csak egyféle betűből áll, akkor pl. az $uvvwxxy$ szó nem 3, hanem több blokkból áll, ezért ez nincs a nyelvben. Ugyanez igaz x-re is.

Ha v és x is ugyanabban a blokkban van (az egyik akár üres is lehet), akkor pumpáláskor ennek a blokknak a hossza változik, míg a másik kettővé nem, a szó kikerül a nyelvből. Ha v és x különböző blokkokban vannak (és egyik sem üres), akkor is csak két blokk lesz érintve a pumpáláskor, a harmadik hossza nem változik, így sem maradunk a nyelvben.

Tehát minden felosztás ellentmond a pumpálási lemmának, a nyelv nem lehet CF.

11. Legyen $L = \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^j\mathtt{c}^k : 1 \leq i, j, k,\ \text{ és } i < j, k < j\}$ Bizonyítsa be, hogy ez az L nyelv nem környezetfüggetlen!

Megoldás: Tegyük fel, hogy CF és legyen $p > 0$ a pumpálási hossz. Válasszuk pl. a $z = \mathtt{a}^p\mathtt{b}^{p+1}\mathtt{c}^p \in L$ szót. Ennek hossza $|z| = 3p + 1 \geq p$, tehát a szó eleget tesz a pumpálási lemma feltételeinek. Vegyük ennek egy tetszőleges $z = uvwxy$ felosztását.

Ha v nem csak egyféle betűből áll, akkor pl. az $uvvwxxy$ szó nem 3, hanem több blokkból áll, ezért ez nincs a nyelvben. Ugyanez igaz x-re is.

Ha v és x is ugyanabban a blokkban van (az egyik akár üres is lehet), akkor az a- és a c-blokk esetén felfelé pumpáláskor a megfelelő blokk hossza eléri vagy meghaladja a b-blokk hosszát, a szó nem lesz a nyelvben. Ha a b-blokkban van mindkét részszó, akkor a lefelé pumpálás viszi ki a nyelvből.

Ha v és x különböző blokkokban vannak (és egyik sem üres), akkor, mivel $|vwx| \leq p$ az egyikük a b-blokkban van. Megint a lefelé pumpálás visz ki a nyelvből, hiszen a harmadik, nem érintett blokk hosszánál kevesebb b lesz. Tehát a szó minden felosztása ellentmond a pumpálási lemmának, a nyelv nem lehet CF.

12. Legyen $L = \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^j\mathtt{c}^k : i < j < k\}$. Igaz-e, hogy ez a nyelv
    (a) reguláris
    (b) környezetfüggetlen
    (c) nem környezetfüggetlen ?

Megoldás: Megmutatjuk, hogy (c) igaz, és akkor persze (a) és (b) nem igaz.

Tegyük fel, hogy L egy CF nyelv és legyen $p > 0$ a pumpálási hossza.

Válasszuk pl. a $z = \mathtt{a}^p\mathtt{b}^{p+1}\mathtt{c}^{p+2} \in L$ szót. Ennek hossza $|z| = 3p + 3 \geq p$, tehát a szó eleget tesz a pumpálási lemma feltételeinek. Vegyük ennek egy tetszőleges $z = uvwxy$ felosztását.

Ha v nem csak egyféle betűből áll, akkor pl. az $uvvwxxy$ szó nem 3, hanem több blokkból áll, ezért ez nincs a nyelvben. Ugyanez igaz x-re is.

Ha v és x is ugyanabban a blokkban van (az egyik akár üres is lehet), akkor az a- és a b-blokk esetén felfelé pumpáláskor a megfelelő blokk hossza eléri vagy meghaladja az utána levő blokk hosszát, a szó nem lesz a nyelvben. Ha a c-blokkban van mindkét részszó, akkor a lefelé pumpálás viszi ki a nyelvből.

Ha v és x különböző blokkokban vannak (és egyik sem üres), akkor, mivel $|vwx| \leq p$, vagy egyikük sincs az a-blokkban és ekkor a lefelé pumpáláskor túl kevés b lesz, vagy egyikük sincs a c-blokkban, amikor meg a felfelé pumpáláskor túl sok b lesz. Tehát a szó minden felosztása ellentmond a pumpálási lemmának, a nyelv nem lehet CF.

. . . .