2. Minimálautomata, reguláris kifejezés

1. Legyen $L \subseteq \{\texttt{0}, \texttt{1}\}^*$ a `011` részszót tartalmazó szavakból álló nyelv.
   (a) Ekvivalensek-e az alábbi szópárok: `0` és `1`, `000` és `0`, `0011` és `0111011`
   (b) Hány ekvivalenciaosztály van L-re nézve és mik ezek?

Megoldás:

(a) $\texttt{0} \not\sim \texttt{1}$, mivel $x = \texttt{0}$ és $y = \texttt{1}$ esetén $z = \texttt{11}$ választással $xz = \texttt{011} \in L$ és $yz = \texttt{111} \notin L$.
$\texttt{000} \sim \texttt{0}$, mivel ha $x = \texttt{000}$ és $y = \texttt{0}$, az $yz \in L$ pontosan akkor teljesül, ha vagy $z \in L$ vagy z első két karaktere `11`. A feltétel x-re is igaz, hiszen ennek a két kezdő `0` karaktere nem lehet egyetlen `011` részszónak sem a része.
$\texttt{0011} \sim \texttt{0111011}$, mivel a pár mindkét tagjában már szerepel a `011` résszó, így ezek, és minden folytatásuk is L-ben van.

(b) Négy osztály van.
A `011` osztálya a nyelv szavaiból áll – ezek minden folytatása is L-ben van.
A `01` osztálya az összes `01`-re végződő szó, amiben nincs `011` – ezek mindegyikéből csak úgy kaphatunk L-beli szót, hogy vagy `1`-gyel folytatjuk, vagy L-belit fűzünk hozzá.
A `0` osztályába tartozik az összes `0`-ra végződő szó, amiben nincs `011` – ezek mindegyikéből csak úgy kaphatunk L-beli szót, hogy vagy `11`-gyel folytatjuk, vagy L-belit fűzünk hozzá.
Az `1` osztályába tartozik az összes `11`-re végződő szó, amiben nincs `011`, továbbá az `1`, ε is – ezekből mindegyikéből csak úgy kaphatunk L-beli szót, ha L-belit fűzünk hozzá.

Mivel ezek lefedik az összes esetet, több osztály nincs. (Ezek megfelelnek a minimálautomata 4 állapotának.)

2. Legyen $\Sigma = \{\texttt{a},\texttt{b}\}$ és $L \subseteq \Sigma^*$. Tudjuk, hogy az alábbi szópárok ekvivalensek: $\varepsilon \sim \texttt{a}$, $\texttt{a} \sim \texttt{bb}$, $\texttt{bab} \sim \texttt{baba}$ valamint, hogy $\varepsilon \notin L$, $\texttt{b} \in L$, $\texttt{ba} \notin L$, $\texttt{baba} \in L$.

Legalább hány ekvivalenciaosztályba oszthatók a szavak? Minimálisan hány állapota kell legyen egy ilyen tulajdonságú L nyelvet elfogadó DVA-nak? Adjon meg egy minél kevesebb állapotú teljes DVA-t!

Megoldás: Mivel $\varepsilon \notin L$ és $\texttt{b} \in L$, ezért $\varepsilon \not\sim \texttt{b}$, így legalább két osztály kell, legyenek ezek A_0 és A_1, és legyen $\varepsilon \in A_0$ $\texttt{b} \in A_1$. Ekkor $A_1 \subseteq L$ és az ekvivalenciák miatt tudjuk, hogy $\texttt{a}, \texttt{bb} \in A_0$.

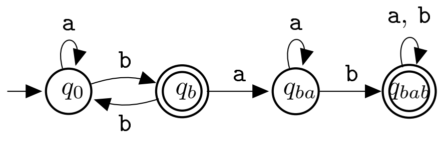
Nézzük most a `ba` szót. Mivel $\texttt{ba} \notin L$, ezért $\texttt{ba} \notin A_1$. Megmutatjuk, hogy $\texttt{ba} \notin A_0$, azaz egy harmadik osztály tagja. Tegyük fel, hogy $\texttt{ba} \in A_0$. Ekkor a $\varepsilon \sim \texttt{ba}$ ekvivalencia miatt $\texttt{b} \sim \texttt{bab}$, és ezért $\texttt{ba} \sim \texttt{baba}$ is teljesül, ami a $\texttt{bab} \sim \texttt{baba}$ feltétel miatt azt adja, hogy $\texttt{b} \sim \texttt{ba} \sim \varepsilon$, azaz $\texttt{b} \notin L$. Ez pedig ellent mond a feltételnek.

Tehát A_0 és A_1 mellett biztos van még egy osztály, $\texttt{ba} \in A_2$.

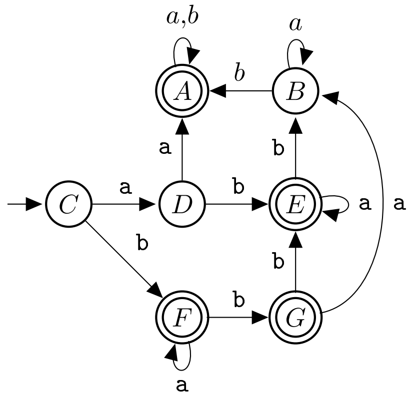
Mivel ekvivalens a `baba` szóval, ezért $\texttt{bab} \in L$. Igy biztos, hogy nincs az A_0 és A_2 osztályokban. De vegyük észre, hogy A_1-ben sem lehet benne, hiszen akkor $\texttt{b} \sim \texttt{bab}$ miatt $\texttt{ba} \sim \texttt{baba}$ is teljesülne, ami ellentmondana a feltételeknek, hogy $\texttt{ba} \notin L$ és $\texttt{baba} \in L$.

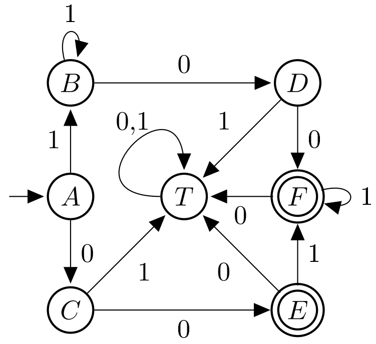
Ezzel azt láttuk, hogy 4 osztály szükséges, ami azt is jelenti, hogy minden teljes DVA-nak, ami a feltételeknek megfelelő nyelvet fogad el van legalább 4 állapota.

Most mutatunk egy 4 állapotú teljes DVA-t egy ilyen L nyelvre, ami igazolja, hogy van olyan a feltételeknek megfelelő nyelv, aminél több osztályra nincs szükség.



3. Mindkét megadott automatára döntse el, hogy abban az automatában ekvivalensek-e az alábbi állapotok?
   (a) A és D (b) A és B (c) B és C





Megoldás: Mindegyik esetben azt kell eldönteni, hogy van-e olyan szó, amit a megadott állapotokból indítva a pár egyikénél elfogadó, a másiknál elutasító állapotba vezet.

(a) Mindkét esetben $A \not\sim D$:

Az első automata esetében az üres szó jó lesz, hiszen A elfogadó és D nem.

A másik automatánál az üres szó még nem jó, de az egyetlen `0`-ból álló szó már igen, mert A-ból a nem elfogadó C-be, D-ből pedig az elfogadó F-be visz.

(b) Az első automatánál nem ekvivalensek, a másodiknál igen:

Az első automata esete most is egyszerű, az egyik állapot elfogadó, a másik nem, tehát $A \not\sim B$.

A második automatánál az üres szó nyilván nem jó, mivel egyik állapot sem elfogadó. Vegyük észre, hogy a $\delta(A,\mathtt{1}) = \delta(B,\mathtt{1})$ feltételből az következik, hogy azok a szavak sem jók, melyeknek az első karaktere `1`, hiszen ezekre az első lépés után a két számítási út megegyezik. A `0` sem jó, hiszen ezzel az egyaránt nem elfogadó C, illetve D állapotba kerülünk. A `01`-gyel kezdődő szavak mindkét esetben a T állapotban érnek véget. A `00` szó sem megfelelő, mert ez mindkét esetben elfogadó állapotba vezet (E, illetve F). Amennyiben kettőnél hosszabb, `00` kezdetű szavunk van, a következő karakterrel azonos állapotba kerül a két számítási út (és persze innen már együtt is marad).

Ezzel azt láttuk, hogy $A \sim B$ a második automata esetében, hiszen nincs olyan szó amire az egyik állapotból elfogadóba a másikból elutasítóba kerülnénk.

(c) Egyiknél sem ekvivalensek:

Az első automatánál az `aa` szó az egyik esetben az A elfogadó, a másik esetben a a B elutasító állapotba vezet.

A második automatánál pl. a `0`-val az egyik esetben a D nem elfogadó, a másik esetben az E elfogadó állapotba lépünk.

4. Az előző feladat automatáiból a tanult módon készítse el a minimálautomatáikat!

Megoldás: Két csoporttal, a nem elfogadók és az elfogadók csoportjával kezdjük, majd minden állapotra megnézzük, hogy ezek közül az ábécé betűi hatására melyikbe megy.

Az bal oldali automatánál ez így alakul:

	I			II			
	B	C	D	A	E	F	G
a	I	I	II	II	II	II	I
b	II	II	II	II	I	II	II

A nem homogén osztályokat szétbontjuk, és újra megvizsgáljuk az átmeneteket

	I		II	III		IV	V
	B	C	D	A	F	E	G
a	I	II	III	III	III	IV	I
b	III	III	IV	III	V	I	IV

Megint felbontjuk a nem homogén osztályokat, és utána azt kapjuk, hogy az eredeti automata minden állapota külön ekvivalencia osztályba tartozik. Azaz az automata már minimális volt.

A jobb oldali automatára ugyanez:

	I					II	
	A	B	C	D	T	E	F
0	I	I	II	II	I	I	I
1	I	I	I	I	I	II	II

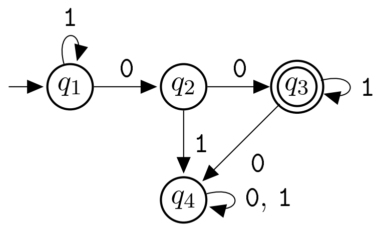
A nem homogén osztályokat szétbontjuk, és újra megvizsgáljuk az átmeneteket

	I			II		III	
	A	B	T	C	D	E	F
0	II	II	I	III	III	I	I
1	I	I	I	I	I	III	III

Az első csoport még nem homogén, kell még egy lépés:

	I		II		III		IV
	A	B	C	D	E	F	T
0	II	II	III	III	IV	IV	IV
1	I	I	IV	IV	III	III	IV

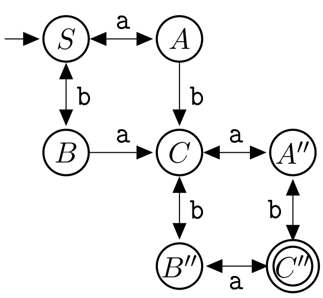
Ezek szerint a minimálautomata:



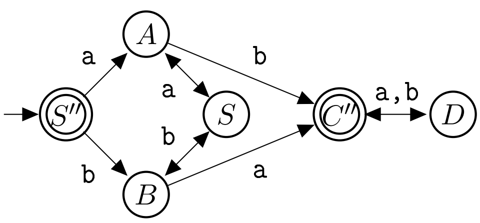
5. Legyen $\Sigma = \{\mathtt{a},\mathtt{b}\}$ és $L \subseteq \Sigma^*$ álljon azokból a szavakból, melyekben az a-k száma és a b-k száma is páratlan. Adjon minimálautomatát az L^2 és L^* nyelvekre!

Megoldás: Az L, L^2, L^* nyelvekre már adtunk VA-t az 1. feladatsorban. Most ezekből az utóbbi kettőt kell minimalizálni. Illetve, még előtte ki kell küszöbölni az ε-átmenetet és determinisztikussá kell tenni!

A végeredmény L^2 esetében



A minimálautomata L^*-ra:



6. Legyen $\Sigma = \{\mathtt{a},\mathtt{b}\}$ és $L \subseteq \Sigma^*$ álljon azokból a nem üres szavakból, melyekben van páratlan blokk. Adjon minimálautomatát az L^* nyelvhez!

   Megoldás: Az 1. feladatsorban már adtunk rá DVA-t. Az ottani 1. megoldás konstrukciójának eredménye egy 9 állapotú teljes DVA volt, amiben minden állapot elfogadó. Ha alkalmazzuk erre a minimalizáló eljárást, akkor megkapjuk a 2. megoldásban kitalált, egyetlen állapotú DVA-t.

7. Igaz-e, hogy ha az L nyelvhez tartozó minimálautomatából a tanult konstrukció szerint készítünk véges automatát a komplementer $\overline{L}$ nyelvhez, akkor az így kapott automata minimális lesz?

   Megoldás: Igaz, mert
   1. változat: ugyanazok az ekvivalenciaosztályok az L-re, mint az $\overline{L}$-re.
   2. változat: ha az így kapott automata minimalizálásakor csökkenne az állapotok száma, akkor ebben megváltoztatva az elfogadást–nem elfogadást, kisebb automatát kapnánk az eredeti L nyelvre, ami ellentmond annak, hogy az L minimálautomatájából indultunk ki.

8. Álljon az $L \subseteq \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$ nyelv azokból a szavakból, melyekben minden a-blokk páratlan hosszú. Adjon L-hez reguláris kifejezést!

   Megoldás: A páratlan hosszú blokkok így írhatók fel: $\mathtt{a}(\mathtt{aa})^*$. Amire vigyázni kell, hogy két ilyen blokk közé kerüljön legalább egy b, mert különben összeolvadnak egy páros blokká. Továbbá, hogy a szó elején és végén állhat b is, de lehet a-blokk is. Tehát ez jó lesz: $\mathtt{b}^*\ (\mathtt{a}(\mathtt{aa})^*\ \mathtt{bb}^*)^*\ (\varepsilon + \mathtt{a}(\mathtt{aa})^*)$.

. . . .