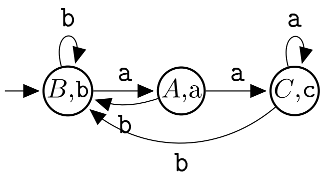
12. Mealy-automaták, fordítók

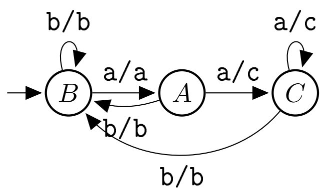
1. (a) Adjon meg egy Moore-automatát a következő feladathoz:
A bemeneti ábécé a $\Sigma = \{\texttt{a}, \texttt{b}\}$, kimeneti ábécé $\Gamma = \{\texttt{a}, \texttt{b}, \texttt{c}\}$ és az automata minden szóban az egymás mellett levő a betűket a másodiktól kezdve lecseréli c-re. (Például aabbaaa $\mapsto$ acbbacc.)

   (b) A tanult módon alakítsa át az automatát Mealy-automatává!

Megoldás: 3 állapot elég lesz (nem a-ra végződik, egy a-ra végződik, aa-ra végződik), mindegyikhez más-más kimeneti karakter tartozik. Ezek között az átmenetek világosak:

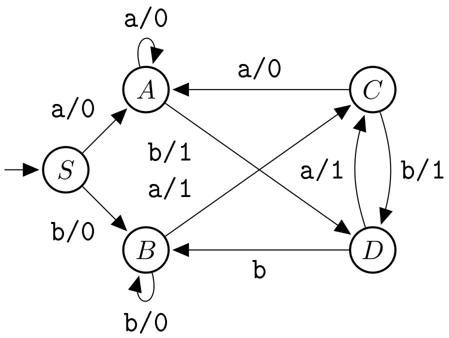


Az ebből kapott Mealy-automata állapotai ugyanazok, a kimenet az átmenetekre tolódik:



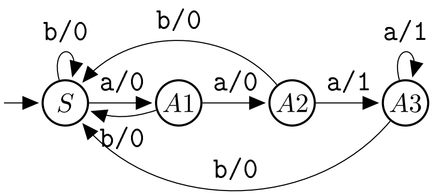
2. A tanult módon alakítsa át az előző feladatsor 11/7 Moore-automatáját Mealy-automatává!

Megoldás: Az állapotok maradnak, kimenet az átmenetekre tolódik.



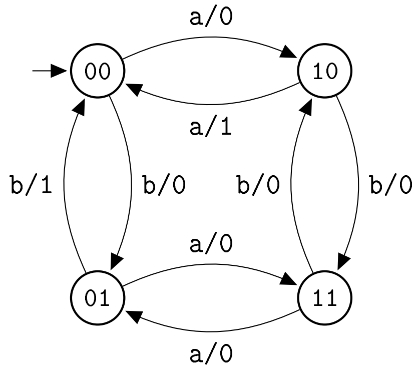
3. Adjon meg egy Mealy-automatát, ami minden $w \in \{\texttt{a}, \texttt{b}\}^*$ szóból egy olyan 0-1 sorozatot készít, amiben mindig ott van 1, ahol az eredeti szóban megjelent az aaa részszó, azaz egy a előtt van már két a.

Megoldás: 4 állapotot használunk, amelyek azt jelzik, hol tartunk az aaa szóban. Minden b visszavisz a kezdőállapotba.



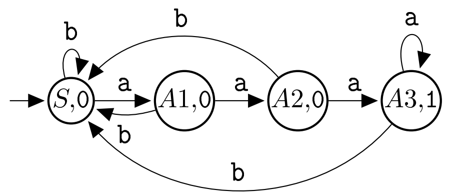
4. Adjon meg egy Mealy-automatát, ami minden nem üres $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$ szóból egy olyan 0-1 sorozatot készít, amiben annyiszor fordul elő az `1`, ahány olyan kezdőszelete van w-nek, ahol az `a`-k és a `b`-k száma is páros.

   Megoldás: A már ismert, a paritásokat számon tartó 4 állapotú automatához adunk kimeneteket, ami akkor lesz 1, amikor a páros-párosnak megfelelő `00` állapotba lépünk.

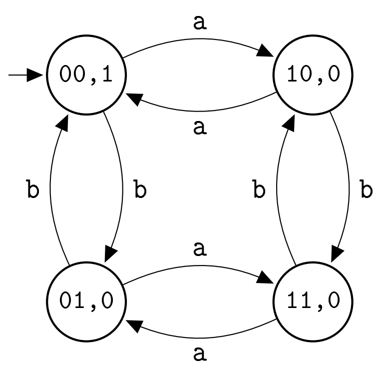


5. A tanult módon alakítsa át az előző Mealy-automatákat Moore-automatává!

   Megoldás: 3. feladat automatája: Minden eredeti állapotnak 2 változata lehet, a két kimeneti karakternek megfelelően, de csak azokat hozzuk létre, amelyek szükségesek. Legyen a kezdőállapot az $(S,\mathtt{0})$.



   4. feladat automatája: Minden eredeti állapotnak 2 változata lehet, a két kimeneti karakternek megfelelően. A `00`-ba lépve a kimenet `1` lesz, érdemes az ennek megfelelő `(00,1)` jelölésű állapotot választani kezdőállapotnak.



   Látszik, hogy így minden eredeti állapotnak csak az egyik változata kell, ami világos, hiszen minden állapotba csak azonos kimenetű nyilak mutattak.

   Ha a `(00,0)` állapotot választjuk kezdőállapotnak, természetesen akkor ebbe nem fogunk visszalépni, az eredetileg a `00`-ba vivő átmenetek a `(00,1)`-be mennek.

6. Van-e olyan Moore-automata, amire teljesül, hogy minden $k \geq 1$ esetén $\mu(\mathtt{a}^{2k}) = \mathtt{0}^{2k}$ és $\mu(\mathtt{a}^{2k+1}) = \mathtt{01}^{2k}$?

   Megoldás: Nincs, hiszen egy Moore-automatánál minden w szóra teljesül, hogy $\mu(w\mathtt{a}) = \mu(w)\mu(\mathtt{a})$, ami a megadott μ esetén nem igaz.

7. Adjon meg olyan véges fordítót, ami az $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$-on van értelmezve és minden $n > 0$ esetén az $\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n$ szóból a $\mathtt{c}^k$ szót állítja elő, ahol

(a) $k = n$

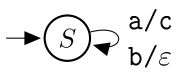
(b) $k = 2n$

(c) $k = \lfloor n/2 \rfloor$

Az előző automaták mire fordítanak egy tetszőleges $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$ szót?

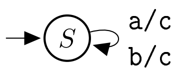
Megoldás: Mindegyik esetben sok megoldás van, arra kell vigyázni, hogy a megadott automaták nem akadhatnak el, hiszen a fordítás mindenhol értelmezett kell legyen. Egy-egy egyszerű megoldást adunk. A válasz arra, hogy mire fordítanak egy tetszőleges szót erősen függ a megadott automatától.

(a)



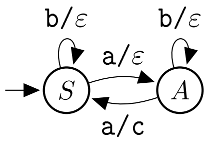
$\mathtt{c}^k$, ahol k a szóban előforduló a betűk száma.

(b)



$\mathtt{c}^k$, ahol k a szó hossza.

(c)



$\mathtt{c}^k$, ahol k a szóban előforduló a betűk számának a fele (lefelé kerekítve).

8. Van-e olyan véges fordító, aminek értékkészlete

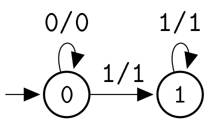
   (a) $\{\mathtt{0}^n\mathtt{1}^n : n \geq 0\}$?

   (b) $\{\mathtt{0}^n\mathtt{1}^k : n, k \geq 0\}$?

Megoldás: Vegyük észre, hogy egy véges fordító értékkészlete az, ami a teljes nyelv, Σ^* fordításaként előáll.

(a) Nincs, mert véges fordító értékkészlete egy reguláris nyelv fordítása, és ezért maga is reguláris, a megadott nyelv pedig nem az.

(b) Van, pl. ha csak a $\mathtt{0}^n\mathtt{1}^k$ alakú szavakon van értelmezve, és ezeken a fordítás megegyezik a szóval. Ehhez egy fordítóautomata:



9. Legyen M_1 és M_2 két véges fordító, melyeknek bemeneti ábécéje Σ, kimeneti ábécéje pedig Δ. Igazolja, hogy ha $L_1, L_2 \subseteq \Delta^*$ a két véges fordító értékkészlete, akkor $L_1 \cup L_2$ is előáll mint egy véges fordító értékkészlete.

Megoldás: A két véges fordítót építsük össze egy új kezdőállapot felvételével, amiből két átmenet indul ki: mindkét eredeti kezdőállapotba ε olvasással és ε írással léphet át. Így egy (új) véges fordítót kapunk (ε-átmenetek megengedettek!). A kapott fordítás a két fordítás uniója lesz, és akkor ez áll az értékkészletekre is.

10. Az alábbi veremfordítónál mi lesz az $(\mathtt{ab})^3\mathtt{b}(\mathtt{ab})^2\mathtt{bb}$ szó fordítása?
A veremautomatának egyetlen, q állapota van, a verem alját az S jelöli. Az átmenetek:

$$(q, \varepsilon, S) \mapsto \{(q, \mathtt{a10}A\mathtt{b}S\mathtt{1}, \varepsilon), (q, \mathtt{b1}, \varepsilon)\}$$
$$(q, \varepsilon, A) \mapsto \{(q, \mathtt{ba}A\mathtt{11}, \varepsilon), (q, \mathtt{b1}, \varepsilon)\}$$
$$(q, \mathtt{a}, \mathtt{a}) \mapsto \{(q, \varepsilon, \varepsilon)\}$$
$$(q, \mathtt{b}, \mathtt{b}) \mapsto \{(q, \varepsilon, \varepsilon)\}$$
$$(q, \varepsilon, \mathtt{0}) \mapsto \{(q, \varepsilon, \mathtt{0})\}$$
$$(q, \varepsilon, \mathtt{1}) \mapsto \{(q, \varepsilon, \mathtt{1})\}$$

Megoldás: Csak egy nem elakadó számítási út van:

$(q, (\mathtt{ab})^3\mathtt{b}(\mathtt{ab})^2\mathtt{bb}, S) \mapsto (q, (\mathtt{ab})^3\mathtt{b}(\mathtt{ab})^2\mathtt{bb}, \mathtt{a10}A\mathtt{b}S\mathtt{1}) \mapsto (q, \mathtt{b}(\mathtt{ab})^2\mathtt{b}(\mathtt{ab})^2\mathtt{bb}, \mathtt{10}A\mathtt{b}S\mathtt{1}) \mapsto$
2 kiíró lépés eredménye **10**, utána megmarad: $(q, \mathtt{b}(\mathtt{ab})^2\mathtt{b}(\mathtt{ab})^2\mathtt{bb}, A\mathtt{b}S\mathtt{1}) \mapsto$
$(q, \mathtt{b}(\mathtt{ab})^2\mathtt{b}(\mathtt{ab})^2\mathtt{bb}, \mathtt{ba}A\mathtt{11b}S\mathtt{1}) \mapsto$ 2 olvasó lépés után: $(q, \mathtt{babb}(\mathtt{ab})^2\mathtt{bb}, A\mathtt{11b}S\mathtt{1})$
$(q, \mathtt{babb}(\mathtt{ab})^2\mathtt{bb}, \mathtt{ba}A\mathtt{1111b}S\mathtt{1}) \mapsto$ 2 olvasó lépés után: $(q, \mathtt{bb}(\mathtt{ab})^2\mathtt{bb}, A\mathtt{1111b}S\mathtt{1}) \mapsto$
$(q, \mathtt{bb}(\mathtt{ab})^2\mathtt{bb}, \mathtt{b11111b}S\mathtt{1}) \mapsto (q, \mathtt{b}(\mathtt{ab})^2\mathtt{bb}, \mathtt{11111b}S\mathtt{1}) \mapsto$ 5 kiíró lépés eredménye **11111**, utána megmarad:
$(q, \mathtt{b}(\mathtt{ab})^2\mathtt{bb}, \mathtt{b}S\mathtt{1}) \mapsto (q, (\mathtt{ab})^2\mathtt{bb}, S\mathtt{1}) \mapsto (q, (\mathtt{ab})^2\mathtt{bb}, \mathtt{a10}A\mathtt{b}S\mathtt{11}) \mapsto (q, \mathtt{babbb}, \mathtt{10}A\mathtt{b}S\mathtt{11}) \mapsto$
2 kiíró lépés eredménye **10**, utána megmarad: $(q, \mathtt{babbb}, A\mathtt{b}S\mathtt{11}) \mapsto (q, \mathtt{babbb}, \mathtt{ba}A\mathtt{11b}S\mathtt{11}) \mapsto$
2 olvasó lépés után: $(q, \mathtt{bbb}, A\mathtt{11b}S\mathtt{11}) \mapsto (q, \mathtt{bbb}, \mathtt{b111b}S\mathtt{11}) \mapsto (q, \mathtt{bb}, \mathtt{111b}S\mathtt{11}) \mapsto$
3 kiíró lépés eredménye **111**, utána megmarad: $(q, \mathtt{bb}, \mathtt{b}S\mathtt{11}) \mapsto (q, \mathtt{b}, S\mathtt{11}) \mapsto (q, \mathtt{b}, \mathtt{b111}) \mapsto (q, \varepsilon, \mathtt{111}) \mapsto$
és itt még kiírja, hogy **111**

Tehát a kimenet az $\mathtt{101}^6\mathtt{01}^6$.

11. Legyen

$$S \to \mathtt{a}A\mathtt{b}S; \mathtt{10}AS\mathtt{1} | \mathtt{b}; \mathtt{1} \qquad A \to \mathtt{ba}A; A\mathtt{11} | \mathtt{b}; \mathtt{1}$$

Mi lesz ez a szintakszisvezérelt fordítási séma alapján az $(\mathtt{ab})^3\mathtt{b}(\mathtt{ab})^2\mathtt{bb}$ szó fordítása?

Megoldás:

A megadott szónak az első nyelvtanbeli levezetéseit kell végigkövetni és megnézni, mire vezetnek ezek a lépések a második nyelvtanban.

$$S \Rightarrow \mathtt{a}A\mathtt{b}S; \mathtt{10}AS\mathtt{1} \Rightarrow \mathtt{a}\ \mathtt{ba}A\ \mathtt{b}S; \mathtt{10}\ A\mathtt{11}\ S\mathtt{1} \Rightarrow (\mathtt{aba}\ \mathtt{ba})A\ \mathtt{b}S; \mathtt{10}A\mathtt{11}\ \mathtt{1}^2S\mathtt{1} \Rightarrow (\mathtt{ab})^3\mathtt{b}S; \mathtt{101}^5S\mathtt{1} \Rightarrow$$
$$(\mathtt{ab})^3\mathtt{ba}A\mathtt{b}S; \mathtt{101}^5\ \mathtt{10}AS\mathtt{1}\ \mathtt{1} \Rightarrow (\mathtt{ab})^3\mathtt{ba}\ \mathtt{ba}A\ \mathtt{b}S; \mathtt{101}^6\mathtt{0}\ A\mathtt{11}S\mathtt{11} \Rightarrow (\mathtt{ab})^3\mathtt{bababb}S; \mathtt{101}^6\mathtt{0111}S\mathtt{11} \Rightarrow$$
$$(\mathtt{ab})^3\mathtt{b}(\mathtt{ab})^2\mathtt{bb}; \mathtt{101}^6\mathtt{01}^6$$

Tehát a fordítás eredménye: $\mathtt{101}^6\mathtt{01}^6$.

Megjegyzés: Ez az előző veremfordítónak megfelelő szintakszisvezérelt fordítási séma.

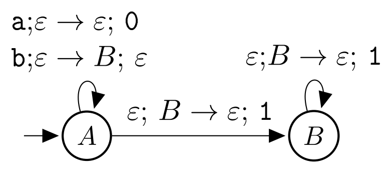
12. Tekintsük azt a fordítási feladatot, amikor minden $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$ szóhoz egy olyan $\mathtt{0}^k\mathtt{1}^n$ szót rendelünk, ahol k a w-ben szereplő $\mathtt{a}$ betűk, n pedig a $\mathtt{b}$ betűk száma!

    (a) Adjon meg ehhez egy veremfordítót!

    (b) Adjon meg hozzá egy szintakszisvezérelt fordítási sémát!

Megoldás:

(a) A veremfordító működése: amikor $\mathtt{a}$ betűt lát, kiír egy $\mathtt{0}$-t, a $\mathtt{b}$ betűket meg a veremben gyűjti. Amikor a szó végére ért, akkor a veremből kiszedegeti a $\mathtt{b}$-ket és mindegyiknél kiír egy $\mathtt{1}$-et.



(b) A fordítási sémában mindkét nyelvtan szabályos CF nyelvtan. Az 1. nyelvtanban balról jobbra generáljuk a karaktereket, míg a 2. nyelvtanban a $\mathtt{0}$ a változó elé, míg az $\mathtt{1}$ a változó mögé kerül és így a $\mathtt{0}$-k elöl, az $\mathtt{1}$-ek hátul gyűlnek:

$$S \to \varepsilon; \varepsilon \mid A; A$$
$$A \to \mathtt{a}A; \mathtt{0}A \mid \mathtt{b}A; A\mathtt{1} \mid \mathtt{a}; \mathtt{0} \mid \mathtt{b}; \mathtt{1}$$

13. Legyen G a következő nyelvtan: $S \to \mathtt{a}S\mathtt{b}S \mid \mathtt{ab}$. Ha egy $w \in L(G)$ szó bal-levezetésében alkalmazott szabályok sorszámait sorban felírjuk, akkor egy $\{1, 2\}^*$-beli szót kapunk. A fordítás álljon ezekből a szó-sorszámsorozat párokból.

(a) Adjon meg ehhez egy veremfordítót!

(b) Adjon meg hozzá egy szintakszisvezérelt fordítási sémát!

Megoldás: Kezdjük a (b)-vel.

(b) A 2. nyelvtanban a sorszámot a változók elé kell írni, hogy helyes sorrendben kapjuk meg majd ezeket: $S \to \mathtt{a}S\mathtt{b}S; 1SS \mid \mathtt{ab}; 2$

(a) A verem alját jelölő karakter legyen S. A veremautomatának egyetlen, q állapota lesz. Az átmenetek:

$$(q, \varepsilon, S) \mapsto \{(q, \mathtt{a1}S\mathtt{b}S,\varepsilon), (q, \mathtt{ab2},\varepsilon)\}$$
$$(q, \mathtt{a},\mathtt{a}) \mapsto \{(q,\varepsilon,\varepsilon)\}$$
$$(q, \mathtt{b},\mathtt{b}) \mapsto \{(q,\varepsilon,\varepsilon)\}$$
$$(q, \varepsilon,\mathtt{1}) \mapsto \{(q,\varepsilon,\mathtt{1})\}$$
$$(q, \varepsilon,\mathtt{2}) \mapsto \{(q,\varepsilon,\mathtt{2})\}$$

Ez lényegében annak a másolása, ahogy CF nyelvtanból veremautomatát csinálunk, csak a szabály két része a változóknál „össze van ragasztva”. A helyessége abból a bizonyításból következik.

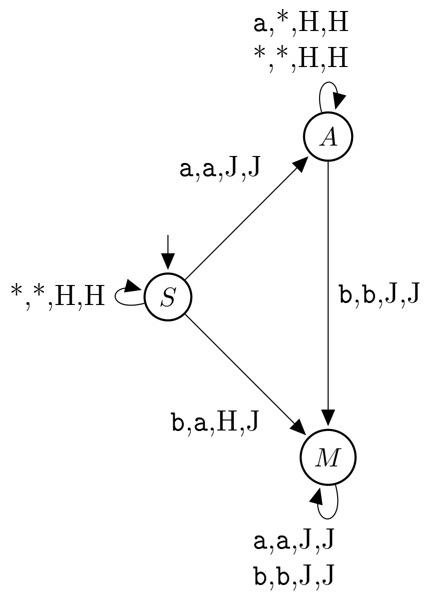
14. Legyen $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ és az $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ függvény a következő:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{ha az } x \text{ szó } \mathtt{ab}\text{-vel kezdődik} \\ \mathtt{a}x & \text{ha az } x \text{ szó } \mathtt{b}\text{-vel kezdődik} \\ \text{nincs definiálva} & \text{egyébként} \end{cases}$$

Adjon meg egy Turing-gépet, ami az f függvényt számolja ki!

Megoldás: 2 szalagos gépet adunk, ahol az 1. szalag nem írható, a 2. nem olvasható, ezért a mozgási irányok mellett elég az 1. szalag esetében csak az olvasott, a 2. szalagnál csak az írott karaktert feltüntetni.

A TG elég magától értetődő, arra kell vigyázni, hogy ahol a függvény nincs definiálva, ott a TG ne álljon meg. b-vel kezdődő szavaknál előbb kiír egy a-t, utána lemásolja a szót (M állapot). Ha a az első karakter, kiír egy a betűt, ami a helyes első karakter, ha egy b-vel tovább tud lépni az M állapotba, ahol már csak a maradékot másolja. Ha nem b-vel folytatódik a szó, akkor a végtelen ciklus miatt ez a már kiírt karakter nem számít kimenetnek.



15. Legyen $\Sigma = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$ és az $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ függvény a következő:

$$f(x) = \begin{cases} \mathtt{1} & \text{ha az } x \text{ szó első és utolsó karaktere is } \mathtt{1} \\ x & \text{ha az } x \text{ szó } \mathtt{0}\text{-val kezdődik} \\ \text{nincs definiálva} & \text{egyébként} \end{cases}$$

Adjon meg egy Turing-gépet, ami az f függvényt számolja ki!

Megoldás: A gondolat: `0`-val `0`-t kiírva átlépünk a további karakterek másolását végző M állapotba.

A kezdő `1` karakterkor kiírjuk az `1`-t innen már csak arra kell vigyázni, hogy ha az utolsó nem `1`, akkor a számítás ne álljon le (és ezen az ágon máskor ne írjunk ki semmit).