Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok
2000. november 2.

1. Adjuk meg, az t paraméter értékétől függően, az alábbi egyenletrendszer megoldását.

$$\begin{aligned} x + 3y - z &= 2 \\ 2x - 2y + 6z &= 12 \\ -3x - y + t \cdot z &= 3 \end{aligned}$$

2. Határozzuk meg a 3 dimenziós térben az $(1, 1, 1)$ és $(2, 2, 4)$ pontokon átmenő egyenesnek és a $2x + 3y - z = 2$ egyenletű síknak a metszetét.

3. Mely z komplex számokra teljesül a $z^2 - iz + 2 = 0$ egyenlet?

4. Mi a $z = (1 - i)^{2000} - i(1 + i)^{2002}$ komplex szám kanonikus alakja?

5. Legyen A egy n sorból és n oszlopból álló valós mátrix, a k-adik sorának j-edik elemét jelölje a_{kj}. Legyen B az az n-szer n-es mátrix, amiben a k-adik sor j-edik eleme $b_{kj} = \frac{k}{j} a_{kj}$ $(1 \le k, j \le n)$. Mennyi B determinánsa, ha tudjuk, hogy A determinánsa 1?

6. A valós számhármasok vektorterében alteret alkotnak-e azok az (x_1, x_2, x_3) vektorok, melyekre $x_1 = 2x_2 - 3x_3$?

7. Legyen a V térnek $a_1, a_2, \ldots, a_n$ egy bázisa. Tekintsük a következő n vektort:

$$\begin{aligned} b_i &= a_i + a_{i+2} \quad \text{ha } i = 1, 2, \ldots, n-2, \\ b_{n-1} &= a_{n-1} + a_1, \\ b_n &= a_n + a_2. \end{aligned}$$

   (a) $n = 3$ esetén bázist alkotnak-e a $b_1, b_2, \ldots, b_n$ vektorok?
   (b) $n = 4$ esetén bázist alkotnak-e?
   (Szorgalmi feladat: általában n-re bázist alkotnak-e ?)

8. Legyen P_5 a legfeljebb ötödfokú valós együtthatós polinomok tere. Vegyük azt az $f : P_5 \longrightarrow P_5$ leképezést, melynél $f(p(x)) = \alpha \cdot p'(x) + \beta$ valamely rögzített α, β valós számokra. Határozzuk meg az összes olyan α, β párt, amire az f leképezés lineáris lesz. Ha f lineáris leképezés, adjuk meg egy mátrixát is.

Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok
2000. december 7.

1. Határozzuk meg x minden értékére az

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & x \end{pmatrix}$$

   mátrix rangját!

2. Egy $\mathcal{A} : V \to V$ lineáris transzformációt tükrözésnek hívunk, ha minden $v \in V$ vektorra $\mathcal{A}(\mathcal{A}(v)) = v$. Bizonyítsuk be, hogy tükrözés mátrixának determinánsa nem lehet 0.

3. Az $x_1^2 + ax_1x_2 + 4x_2^2$ kvadratikus alak az a paraméter értékétől függően mikor milyen definit lesz?

4. Bontsuk a sík összes egyeneseinek halmazát két részhalmazra: H_1-et alkossák az origón átmenő egyenesek, H_2-t a többi. Határozzuk meg H_1 és H_2 számosságát!

5. Tíz gyerek hányféleképpen állítható úgy sorba, hogy Jancsi és Juliska egymás mellett álljanak?

6. Rajzoljuk le azt a gráfot, melynek pontjai a 4 hosszú nullákból és egyesekből álló sorozatok és két csúcs akkor van éllel összekötve, ha egyik a másikból egy „forgatással” megkapható, azaz ha az egyik a (b_1, b_2, b_3, b_4) akkor a másik a (b_2, b_3, b_4, b_1) sorozathoz tartozó pont.

7. Hány olyan páronként nem izomorf 6 pontú összefüggő egyszerű gráf létezik, melyben két másodfokú és négy harmadfokú pont van?

8. Az előre megszámozott (címkézett) n darab pont közé hányféleképp húzhatunk be éleket úgy, hogy egyszerű gráfhoz jussunk?