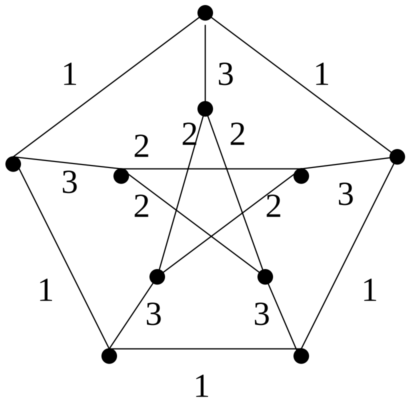
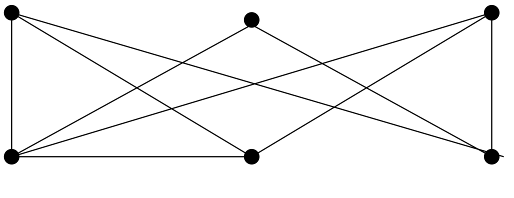
Bevezetés a számításelméletbe I.
Vizsgazárthelyi feladatok
2000. december 18.

1. Legyen $A = (1,0,0)$, $B = (1,-2,3)$ két pont, a B ponton átmenő e egyenes egyenlete $(x-1)/5 = (y+2)/3 = z-3$. Keressük meg az e egyenesen azokat a pontokat, melyekre az ABC háromszögben $\overline{AB} = \overline{BC}$ teljesül!
2. A kétezredik komplex egységgyökök közül hány olyan van, melynek az ezredik hatványa is eggyel egyenlő?
3. Igazoljuk, hogy ha az $(n \times n)$-es A mátrixnak minden eleme $+1$ vagy -1, akkor $\det A$ osztható (2^{n-1})-gyel!
4. Egy $\mathcal{A} : V \to V$ lineáris transzformáció vetítés, ha $\mathcal{A}(\mathcal{A}(v)) = \mathcal{A}(v)$ teljesül minden $v \in V$ vektorra. Adjunk példát olyan vetítésre, melynek mátrixához tartozó kvadratikus alak pozitív szemidefinit!
5. Tekintsük a síkon azon négyzetek halmazát, melyeknek legalább az egyik csúcsa egész koordinátájú (a pont mindkét koordinátája egész szám). Mennyi ennek a halmaznak a számossága?
6. Mennyi az $1,2,3,4$ számjegyekből előállítható olyan négyjegyű számok összege, melyekben mindegyik számjegy pontosan egyszer fordul elő?
7. Határozzuk meg hogy az alábbi gráfban hány különböző minimális súlyú feszítőfa található!



8. Síkbarajzolható-e az alábbi gráf? Ha igen rajzoljuk le úgy a síkba, hogy élei egyenes szakaszok legyenek, ha nem rajzolható síkba, bizonyítsuk ezt be.



Bevezetés a számításelméletbe I.
Vizsgazárthelyi feladatok
2001. január 2.

1. Legyen $A = (1, 0, 0)$, $B = (1, -2, 3)$, $C = (3, 2, -4)$ a tér három pontja. Melyik az a D pont, melyre az $ABCD$ négyszög parallelogramma?
2. Mely komplex számokra teljesül a
$$2(z + \overline{z}) = |z|$$
egyenlet?
3. Tetszőleges valós t számra és tetszőleges pozitív egész k számra számítsuk ki az
$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^k$$
mátrixot!
4. Határozzuk meg az
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
mátrix sajátértékeit és a hozzájuk tartozó sajátaltereket!
5. Mennyi az olyan végtelen hosszú $0-1$ sorozatok halmazának számossága, melyekben pontosan 5 darab egyes fordul elő?
6. Hány hatra végződő néggyel osztható ötjegyű szám van?
7. Ketten a következő játékot játszák. Adott n pont, kezdetben semelyik kettő nincs összekötve. A játékosok felváltva lépnek, minden lépésben a soron következő játékos az n pont közül két tetszőlegesen választott közé behúz egy élet. Az veszít, aki egy olyan élet húz be, amitől a gráfban kör keletkezik. A kezdő vagy a másodiknak lépő játékos fog nyerni, ha feltesszük, hogy mindketten a lehető legjobban játszanak?
8. Van-e olyan 9 pontú G gráf, hogy sem G, sem a komplementere $\overline{G}$ nem síkbarajzolható?

Bevezetés a számításelméletbe I.
Vizsgazárthelyi feladatok
2001. január 15.

1. Számítsuk ki az $A = (1, 3, 5)$, a $B = (2, 0, 1)$ és a $C = (3, 0, 3)$ pontok által meghatározott háromszög S súlypontját! Határozzuk meg a térnek azon pontjait, melyek rajta vannak az ABC síkra az S pontban állított merőleges egyenesen!

2. A kétezredik komplex egységgyökök között hány olyan van, melynek az ötödik hatványa nem egyenlő eggyel?

3. Mennyi az $(n \times n)$-es $A = (a_{ij})$ mátrix determinánsa, ha

$$a_{ij} = \begin{cases} (i-j+1)^2 & \text{ha } i \geq j \\ 0 & \text{ha } i < j \end{cases}$$

4. Legyen A egy (2×3)-as mátrix és legyen $B = AA^T$. Bizonyítsuk be, hogy a B-hez tartozó kvadratikus alak pozitív definit vagy pozitív szemidefinit. Adjunk példát olyan A-ra, amikor B pozitív definit és olyan A-ra is, amikor B pozitív szemidefinit de nem pozitív definit!

5. Mennyi az olyan nullával kezdődő végtelen hosszú sorozatok halmazának számossága, melyekben bármely két szomszédos tag különbsége ± 1 ?

6. Hányféleképpen tölthették ki azt a lottószelvényt, amelyen pontosan három találat volt? (A lottón 90 számból húztak ki 5 számot.)

7. A $V = \{1, 2, \ldots, 2n\}$ (számozott) pontokon hány olyan egyszerű G gráf adható meg, melynek $2n-2$ éle van és két egyforma méretű összefüggő komponensből áll?

8. Síkbarajzolható-e az alábbi gráf? Ha igen rajzoljuk le úgy a síkba, hogy élei egyenes szakaszok legyenek, ha nem rajzolható síkba, bizonyítsuk ezt be.