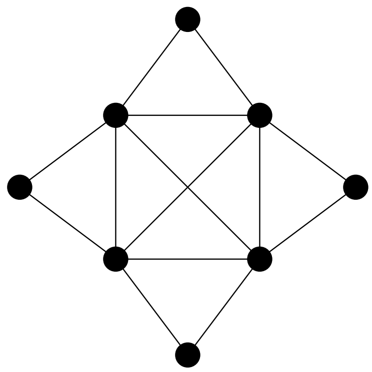
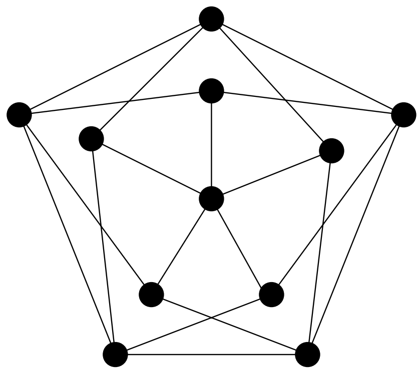
Bevezetés a számításelméletbe II. **Zárthelyi feladatok** **2000. április 6.**

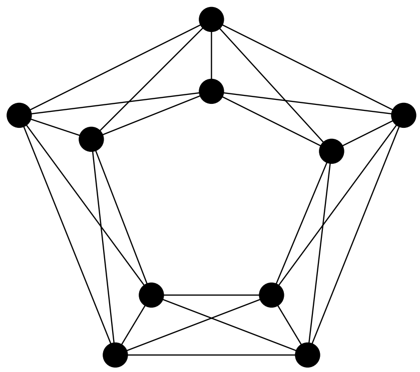
1. Minimálisan hányszor kell "felemelni" a ceruzát az alábbi ábrán látható gráf lerajzolásakor, ha minden élet csak egyszer rajzolhatunk meg? (Egyéb vonalakat nem rajzolhatunk.)



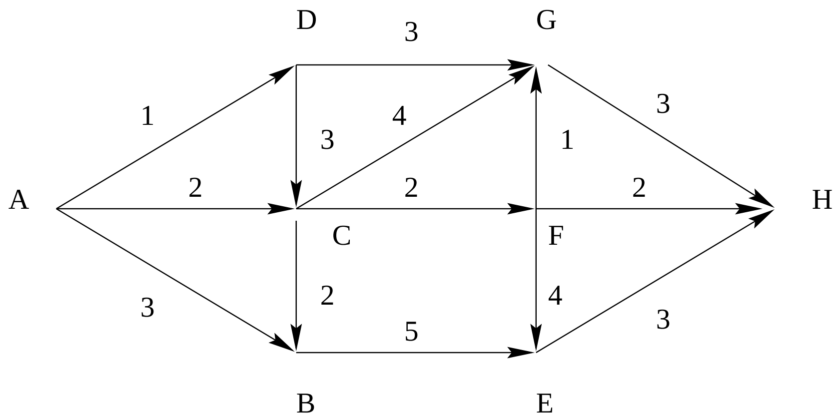
2. Igaz-e, hogy ha egy páros gráfban van Hamilton-kör, akkor teljes párosítást is tartalmaz?
3. Egy társaságban bármely két embernek legalább két közös ismerőse van. Tudjuk továbbá, hogy bármely két ember vagy ismeri egymást, vagy ha nem, akkor a társaság bármely harmadik tagját legalább az egyikük ismeri. Bizonyítsuk be, hogy a társaság tagjai leültethetők egy (megfelelő méretű) kerek asztal köré úgy, hogy mindenki két ismerőse között üljön.
4. Állapítsuk meg, hogy mennyi az alábbi ábrán látható G gráf összes élét lefogó pontok $\tau(G)$ minimális száma.



5. Adjuk meg az összes olyan véges egyszerű gráfot, amire $\chi(G) = 3$ és tetszőleges $e \in E(G)$ élre $\chi(G - e) < 3$.
6. Mennyi az ábrán látható gráf kromatikus száma?



7. Állapítsuk meg, hogy mennyi a feladat elvégzéséhez minimálisan szükséges idő az alábbi PERT diagram által leírt munkafolyamatnál!



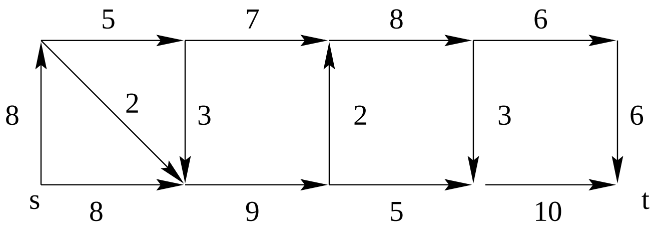
8. Legyen A a G véges egyszerű irányítatlan gráf szomszédossági mátrixa, E pedig az A-val azonos méretű egységmátrix. Bizonyítsuk be, hogy a G gráfban található legnagyobb független ponthalmaz $\alpha(G)$ mérete és az $(A+E)$ mátrix $rk(A+E)$ rangja között fönnáll az

$$\alpha(G) \leq rk(A+E)$$

összefüggés.

Bevezetés a számításelméletbe II. **Zárthelyi feladatok** **2000. május 4.**

1. Adjunk meg az alábbi hálózatban egy maximális folyamot!



2. Bizonyítsuk be, hogy ha a G véges egyszerű gráf síkgráf, akkor G nem lehet hatszorosan (csúcs)összefüggő.

3. Egy 90 fős társaságból bizonyos párok leveleznek egymással. Akárhogyan választunk ki közülük tíz embert, ezek között mindig van legalább kettő, akik leveleznek egymással. Bizonyítsuk be, hogy a levelező párok száma legalább 405.

4. Bizonyítsuk be, hogy 70 ember között mindig van vagy 5 olyan, akik páronként tegeződnek egymással, vagy 5 olyan, akik páronként magázódnak. (Feltesszük, hogy a tegeződés és a magázódás is kölcsönös, és azt is, hogy bármely két ember vagy tegeződik, vagy magázódik.)

5. Bizonyítsuk be, hogy négy egymást követő pozitív egész szám között mindig van olyan, amelyik a másik három mindegyikéhez (külön-külön) relatív prím.

6. Legyenek k és n olyan pozitív egészek, amelyekre $k < n$. Mi a legnagyobb közös osztója az $n!+k$ és az $(n+1)!+k$ számoknak?

7. Legyenek m és n olyan pozitív egészek, amelyekre m osztója n-nek. Bizonyítsuk be, hogy $\varphi(m)$ osztója $\varphi(n)$-nek.

8. Milyen maradékot adhat 45-tel osztva az x szám, ha $12x \equiv 42 \pmod{45}$