Algoritmuselmélet vizsgazárthelyi
2017. május 25.

1. Az M nemdeterminisztikus véges automata állapotainak halmaza $\{q_0, q_1, \ldots, q_8\}$, ábécéje $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$. Ebből az automatából a tanult eljárással elkészítettük az M_d determinisztikus véges automatát. Határozza meg X összes lehetséges értékét, ha tudjuk, hogy M_d-ben előfordulnak a következő átmenetek

$$\begin{array}{rcl} (\{q_2, q_5\}, \mathtt{a}) & \to & \{q_2, q_5\} \\ (\{q_2, q_6\}, \mathtt{a}) & \to & \{q_2, q_6\} \\ (\{q_5, q_6\}, \mathtt{a}) & \to & X \end{array}$$

2. Adjon meg két különböző levezetési fát az $\mathtt{a}+\mathtt{a}*\mathtt{a}+\mathtt{a}$ szóhoz az alábbi nyelvtanban!

$$E \longrightarrow E + E \mid T \qquad T \longrightarrow T * T \mid \mathtt{a}$$

3. Igaz-e, hogy minden L reguláris nyelvre $L \prec SAT$ teljesül?

4. Adott egy $G = (V,E)$ egyszerű irányítatlan gráf. Minden éléhez egy súlyt akarunk rendelni, a súlyok mindegyike a 0, 1, …, 10 egész számok közül kerülhet ki. Célunk, hogy G-ben az élek súlyainak összege maximális legyen, de egyik csúcsnál se legyen a rá illeszkedő élek súlyainak összege 15-nél nagyobb.

   Írja fel egészértékű programozási feladatként ezt a problémát! (A problémát nem kell megoldani.)

5. Egy piros-fekete fában a gyökérnek és még egy csúcsnak 100 a fekete magassága, az összes többi csúcs fekete magassága ennél kisebb. Határozza meg a fában tárolható elemek minimális számát!

6. Zárthelyit szervezünk, amin összesen H hallgató fog részt venni, és ehhez T darab terem áll rendelkezésünkre. Tudjuk, hogy az i-edik terembe h_i hallgató fér be, de lehet benne kevesebb is, $\sum h_i \geq H$. A terem geometriája, oszlopok, stb. miatt ha az i-edik terembe kerül zh-t író hallgató, akkor itt f_i fő zh-felügyelőre van szükségünk. (Tegyük fel, hogy f_i független a terembe ténylegesen kerülő hallgatók számától, feltéve, hogy ez legalább egy fő.)

   Adjon dinamikus programozást használó algoritmust, amivel $O(T \cdot H)$ lépésben meghatározható, mely termeket használjuk a T közül ahhoz, hogy legyen elég hely a hallgatóknak, de az összesen szükséges teremfelügyelők száma minimális legyen!

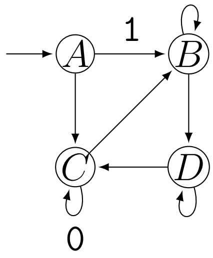
7. Adott n darab intervallum $(a_1,b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n)$, az intervallumok végpontjai racionális számok és szokás szerint $a_i < b_i$. Tegyük fel, hogy egyik intervallum sem tartalmazza teljes egészében a másikat. Az intervallumokat a kezdő a_i koordinátájuk szerint szervezett 2-3 fában tároljuk. Hogyan lehet ennek segítségével egy adott x pontra $O(\log n)$ lépésben meghatározni, hogy a megadottak között van-e olyan intervallum, ami az x pontot tartalmazza?

Algoritmuselmélet vizsgazárthelyi

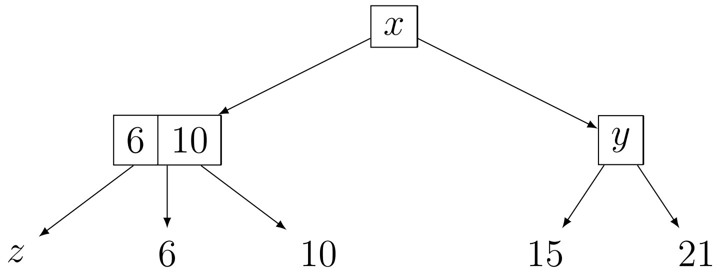
2017. június 1.

1. Legyen $f(n) = 7 \cdot n^2 + 3^{10} \cdot n\sqrt{n} + 82 \cdot \log n$. Megfelelő c konstansok és n_0 küszöbértékek megadásával igazolja, hogy $f(n) = O(n^2)$, és hogy $f(n) = \Omega(n)$.

2. A hiányzó információkkal egészítse ki úgy ezt a $\{\texttt{0},\texttt{1}\}$ bemeneti ábécével rendelkező véges automatát, hogy determinisztikus legyen és az általa elfogadott L nyelvre teljesüljön, hogy $\texttt{0} \in L$, $\texttt{1} \in L$, $\texttt{11} \notin L$ és $\texttt{110} \in L$. Meghatározzák-e teljesen ezek a feltételek a determinisztikus véges automatát?



3. Határozza meg, hogy milyen értékek állhatnak x, y és z helyén az alábbi, különböző pozitív egészeket tároló 2-3-fában!



4. Adjon meg egy környezetfüggetlen nyelvtant az alábbi nyelvhez!
$L = \{\texttt{a}^k\texttt{b}^n : k = n \geq 0 \text{ vagy } k \geq n + 2 \geq 2\}$

5. Adottak az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (nem feltétlenül csak pozitív) egész számok. Azt akarjuk eldönteni, hogy el lehet-e hagyni közülük legfeljebb tízet úgy, hogy a megmaradt számok összege egy adott b szám alatt maradjon. Adjon erre a feladatra egy $O(n)$ összehasonlítást használó algoritmust!

6. Hétfőre több elvégzendő feladatunk is van (házi feladatok beadása, zh-ra készülés, stb., mind különböző tantárgyhoz kapcsolódik). Tegyük fel, hogy tudjuk, hogy az i-edik feladathoz t_i órára van szükség. Ha ennyit rászánunk, akkor biztosan megkapjuk a tárgyhoz tartozó k_i kreditet, de ha kevesebb idő jut rá, akkor biztosan nem kapjuk meg ezt a k_i kreditet. Összesen még h óra van hátra, ami nem feltétlenül elég mindenre. Úgy akarjuk kiválasztani, hogy ez alatt mely feladatokat teljesítsük, hogy összesen minél több kreditet kapjunk.

   Fogalmazza meg a megfelelő eldöntési problémát (nyelvet)! P-beli vagy NP-teljes az így kapott probléma?

7. Szomszédossági mátrixával adott a $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ csúcshalmazon a G irányított gráf. Ebben az olyan irányított körök érdekelnek minket, amelyek átmennek a v_1 csúcson és innen kezdve a kör mentén a csúcsok indexei sorrendben követik egymást, pl. egy k csúcsú kör mentén a csúcsok indexe sorban $1 < i_2 < i_3 < \cdots < i_k$. Adjon algoritmust, ami $O(n^2)$ lépésben meghatározza, hogy mi az a legnagyobb k szám, amire G-ben van k csúcsból álló, a feltételnek megfelelő kör!

Algoritmuselmélet vizsgazárthelyi
2017. június 8.

1. A q_0 kezdőállapotú veremautomata vermében kezdetben a Z szimbólum van és (többek között) érvényesek a következő átmenetek:

   $$\delta(q_0, \mathtt{a}, \varepsilon) = (q_0, A),\ \ \delta(q_0, \mathtt{a}, A) = (q_1, B),\ \ \delta(q_0, \mathtt{b}, A) = (q_2, A),\ \ \delta(q_1, \mathtt{b}, B) = (q_1, \varepsilon).$$

   Adja meg a veremautomata összes lehetséges számítását a $w = \mathtt{aab}$ szón, ha feltesszük hogy e közben a felsorolt átmeneteken kívül más nem alkalmazható!

   A q_0, q_1, q_2 állapotok közül melyik kell, hogy elfogadó legyen és melyik nem, ha azt akarjuk, hogy a w szót a veremautomata elfogadja, de a $w' = \mathtt{aa}$ szót ne?

2. Határozza meg, hogy nézhet ki egy olyan bináris keresőfa, melyre teljesül, hogy a benne tárolt elemek preorder bejárás szerinti sorrendje: 3, 1, 2, 7, 6, 4, 5, 9, 8, 10.

3. Egy $M = 1000$ méretű tömbbe nyitott címzésű hash-elést végzünk a $h(x) = x \pmod{1000}$ hash-függvény segítségével. Valaki azt javasolta, hogy a lineáris próba helyett használjuk a $h_i(x) = i \cdot x \pmod{1000}$ ugrósorozatot ($i = 0, 1, \ldots, 999$). Jó próbasorozatot kapunk így?

4. Tegyük fel, hogy van egy $\mathcal{E}$ eljárásunk, ami tetszőleges egyszerű (súlyozatlan), irányított gráfban meghatározza, hogy mennyi a benne levő leghosszabb irányított kör hossza. Adott G irányított gráfra az $\mathcal{E}$ eljárás segítségével találjuk meg, hogy mely élekből áll a G-beli leghosszabb kör (ha több ugyanolyan hosszú kör is van, akkor elég az egyiknek az éleit meghatározni)! Az algoritmus során az $\mathcal{E}$ eljárás meghívásainak száma és a hívásokon kívül végrehajtott többi lépés száma is legyen polinomiális n-ben, ahol n a G csúcsainak számát jelöli.

5. Adott az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (nem feltétlenül csak pozitív) egész számokból álló sorozat. Ebben olyan szigorúan monoton csökkenő részsorozatot keresünk. hogy a részsorozatban előforduló számok összege minimális legyen. (Az üres sorozat összege 0.) Adjon $O(n^2)$ lépésben működő dinamikus programozást használó algoritmust a legkisebb ilyen összeg meghatározására!

6. Az $A[0..n]$ tömbre teljesül, hogy minden $2 \leq i \leq n-2$ esetén $A[i-2] < A[i] < A[i+2]$. Adjon a tömb rendezésére egy $O(n)$ összehasonlítást használó algoritmust!

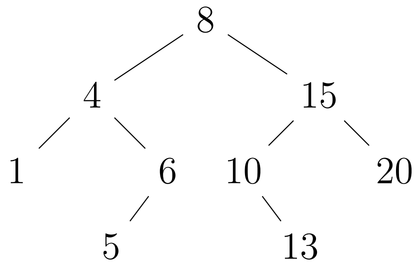
7. Határozza meg az alábbi nyelvtan által generált nyelvet!

   $$S \longrightarrow A \qquad A \longrightarrow AAA \mid B\mathtt{a}B \qquad B \longrightarrow BB \mid \mathtt{b} \mid \varepsilon$$

Algoritmuselmélet vizsgazárthelyi

2017. június 15.

1. A négy elemű 4, 1, 2, 3 sorozat rendezésekor hány összehasonlítás történik és az algoritmus során mikor melyik számpárt hasonlítjuk össze, ha
   a) a beszúrásos rendezést alkalmazzuk lineáris kereséssel?
   b) az összefésüléses rendezést használjuk?
2. Az alábbi keresőfán hajtsa végre a TÖRÖL(8) műveletet!



3. Mutassa meg, hogy az $A \to A+A \mid \mathtt{b}$ nyelvtan nem egyértelmű, de az általa generált nyelv egyértelmű!
4. Mely szavakból áll a $((\mathtt{0}+\mathtt{00})\mathtt{11}^*)^*$ reguláris kifejezés által leírt nyelv?
5. Adjon meg egy PARTÍCIÓ $\prec$ HÁTIZSÁK Karp-redukciót!
6. Egy reklámkampányhoz plakátokat akarunk kirakni. A városban elérhető n plakáthely mindegyikéhez adott, hogy ott várhatóan hányan látják majd, legyenek ezek a számok $k_1, k_2, \ldots, k_n$. Adott továbbá, hogy az i-edik és j-edik hely t_{ij} távolságra van egymástól.

   Összesen legfeljebb p darab plakátot tennénk ki és ezekhez úgy szeretnénk a $p \leq n$ helyet kiválasztani, hogy ezek közül bármely kettő egymástól vett távolsága legalább T legyen és várhatóan minél többen lássák őket. (Feltehetjük, hogy a megfelelő k_i értékek összeadódnak, továbbá, hogy a szereplő k_i és t_{ij} számok egészek.)

   Írja fel egészértékű programozási feladatként ezt a problémát! (A problémát nem kell megoldani.)
7. A ládapakolás feladatra egy lehetséges eljárás a BestFit, amikor sorban vesszük a tárgyakat és az s_i méretű tárgy ($i = 1, 2, \ldots$) az egyik olyan ládába kerül, ahol a legkisebb (de persze legalább s_i) az üres hely mérete. Igazolja, hogy ez az eljárás is egy 2-közelítő algoritmus!