Algoritmuselmélet vizsga

2016. június 1.

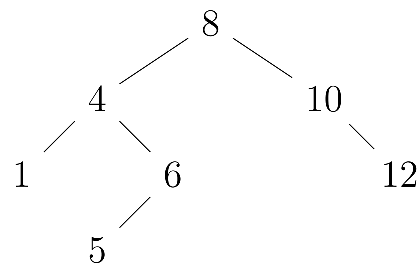
1. Legyen $f(n) = 3\sqrt{n} + 2n^2 + 2^{\log_2 n}$. Adjon meg egy megfelelő c konstanst és n_0 küszöbértéket és ezekkel mutassa meg, hogy $f(n) = O(n^3)$!
2. Tekintsük az $A \to \mathtt{a}AB \mid BC \quad B \to \mathtt{b} \quad BC \to A\mathtt{a} \mid B$ nyelvtant. Környezetfüggetlen-e ez a nyelvtan? Ha nem, akkor változtassa meg úgy, hogy környezetfüggetlen legyen és ugyanazokat a szavakat generálja!
3. Nyitott címzéssel hash-elünk egy kezdetben üres $M = 11$ méretű táblába a $h(x) = x \pmod{M}$ hash-függvénnyel lineáris próbával. Mi lesz a tábla állapota az egyes lépések után, ha a 11, 9, 99, 7, 18 kulcsokat ebben a sorrendben beszúrjuk, majd töröljük a 99-et és végül beszúrjuk a 33-at?
4. Legyen az ábécé a $\Sigma = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$ és M egy olyan hiányos (determinisztikus) véges automata, aminek 5 állapota és 8 átmenete van. Ha a tanult módon kiegészítjük M-et, akkor a kapott új automatának hány állapota és hány átmenete lesz?
5. Adott az n elemet tároló A tömb. Hogyan lehet $O(n \log n)$ összehasonlítással találni egy olyan $i \neq j$ indexpárt, amire $|A[i] - A[j]| < 100$ teljesül?
6. P-beli vagy NP-teljes a LÁDAPAKOLÁS problémának az a változata, amikor minden súly 1/4 vagy 4/5 ?
7. A $G(V, E)$ egyszerű gráf élei súlyozottak. Olyan $X \subseteq E$ maximális súlyú élhalmazt akarunk kiválasztani, hogy minden csúcsra legfeljebb 3 darab X-beli él illeszkedjen. Írja fel egészértékű programozási feladatként ezt a problémát!
8. A következő időszakban sok minket érdeklő fesztivál lesz, azonban sajnos ezek időpontja között vannak átfedések. Ha egy fesztiválra elmegyünk, azon az első naptól az utolsóig ott akarunk lenni, de másnap már mehetünk egy újabbra. A szóba jövő f fesztivál mindegyikéről tudjuk,hogy melyik nap kezdődik és melyik nap végződik, célunk hogy minél több napot töltsünk fesztiválokon.
   (a) Fogalmazza meg a feladatot egy gráfelméleti problémaként!
   (b) Adjon $O(f^2)$ lépésszámú algoritmust a feladat megoldására!

Algoritmuselmélet vizsga
2016. június 8.

1. A 200 hosszú $S \in \{A, B, C\}^*$ szövegben keressük a 4 hosszú $M = AABB$ mintát. Az algoritmus azt találta, hogy $S[100]$ megegyezik a minta első betűjével, de $S[101]$ nem egyezik meg a másodikkal. A következő lépésben a szöveg melyik karakterét a minta melyik karakterével hasonlítja össze
   (a) az egyszerű algoritmus?
   (b) a gyorskeresés?

2. Legyen $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$. Egy determinisztikus véges automatában a kezdőállapotból indulva az 5 hosszú és a 12 hosszú csupa $\mathtt{a}$ betűből álló szó is ugyanabban a q állapotban ér véget. Igazolja, hogy végtelen sok különböző szó van, ami szintén q-ban ér véget!

3. Ha tudjuk, hogy törlés nem történt, akkor mi lehetett az alábbi bináris keresőfában
   (a) az elsőnek beszúrt elem?
   (b) az utolsónak beszúrt elem?
   (Az összes lehetőséget határozza meg!)



4. Adjon környezetfüggetlen nyelvtant az $L = \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^j\mathtt{c}^k \ : \ i - k = j, \ \ i, j, k \geq 0\}$ nyelvhez!

5. Igazolja, hogy nincs olyan összehasonlításokat használó rendezőalgoritmus, amely egy tetszőleges $A[1..n]$ tömb rendezésekor az $A[1]$ elemet minden másikkal összehasonlítja, az $A[2]$ elemet legfeljebb $\lceil n/2 \rceil$ elemmel, és általában az $A[i]$ elemet legfeljebb $\lceil n/2^{i-1} \rceil$ elemmel hasonlítja össze!

6. Jelölje 10SZÍN a 10 színnel színezhető gráfok nyelvét. Igazolja, hogy léteznek az alábbi Karp-redukciók!

$$\text{HAM} \prec \text{10SZÍN} \prec \text{X3C} \prec HAM$$

7. A $T[0..n, 0..m]$ táblázat elemei egész számok. A $T[0, 0]$ elemből úgy akarunk eljutni a $T[n, m]$ elemhez, hogy minden lépésben vagy csak az első vagy csak a második indexet növeljük eggyel. Egy ilyen útvonal értéke legyen az érintett $T[i, j]$ számok közül a pozitívoknak a szorzata. Adjon algoritmust, amely $O(nm)$ időben meghatározza, hogy mi a legnagyobb érték, ami egy, a feltételnek megfelelő útvonalon elérhető!

8. Igaz-e, hogy ha az L nyelvhez van olyan M Turing-gép, amelyre $L(M) = L$, akkor L minden L' részhalmazához is van olyan M' Turing-gép, amelyre $L(M') = L'$?

Algoritmuselmélet vizsga
2016. június 15.

1. Legyen $f(n) = 3\log_2(n^n) + 8\sqrt{n} + 10n^2$. Adjon meg egy megfelelő c konstanst és n_0 küszöbértéket és ezekkel mutassa meg, hogy $f(n) = O(n^2)$!

2. Tekintsük a következő nyelvtant:

$$E \to E + E \mid E * E \mid (E) \mid \mathtt{a}$$

Igaz-e, hogy az alábbi szavak egyértelműen levezethetők a nyelvtanból?

   (a) $\mathtt{a} * \mathtt{a} + \mathtt{a}$

   (b) $\mathtt{a} + \mathtt{a} + \mathtt{a}$

3. Adja meg, hogy az órán tanult 3SZÍN $\prec$ MAXFTL Karp-redukciónál mi lesz a képe a 3 pontú teljes gráfnak!

4. Álljon az L nyelv azokból a pozitív egész N számokból, melyekre teljesül, hogy N bármely két osztójának különbsége legalább 20. Igazolja, hogy $L \in \mathrm{co\,NP}$!

5. Legyen $S \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^*$ egy n hosszú szó. Egy $S[j]\,S[j+1]\cdots S[i]$ részszó súlya jelentse azt, hogy mennyivel több `1` van benne, mint `0` (a súly lehet negatív is, ha több a `0`). Az S szöveghez definiáljuk azt a T tömböt, melyben a $T[i]$ értéke az $S[i]$-vel végződő, nem üres részszavak súlya közül a legnagyobb. Adjon $O(n)$ lépésszámú algoritmust a T tömb kitöltésére! Hogyan és hány lépésben lehet a kitöltött T tömb alapján meghatározni az S-beli részszavak súlyai közül a maximálisat?

6. Adott az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számsorozat. Ebből néhány tagot akarunk úgy kiválasztani, hogy ne legyen közöttük két szomszédos eleme a sorozatnak, és a kiválasztott elemek négyzetösszege maximális legyen.

   Írja fel egészértékű programozási feladatként ezt a problémát! (A probléma megoldására nem kell algoritmust adni.)

7. Egy különböző egész számokat tároló 2-3-fa gyökerében két útjelző van, a 101 és a 117. Legfeljebb hány elemet tárolhat a fa?

8. Igazolja, hogy az alábbi nyelv reguláris!

$$\{w \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^* : w = xpy,\ x, p, y \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^* \text{ és } p \text{ egy legalább 2 hosszú palindrom } \}$$

Algoritmuselmélet vizsga

2016. június 22.

1. Az M egy nemdeterminisztikus véges automata, melynek állapotai $\{q_0, q_1, \ldots, q_9\}$, az ábécé $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$. Ebből az automatából a tanult eljárással állt elő az M' determinisztikus véges automata, aminek két állapotátmenete

$$(\{q_1, q_2, q_5\}, \mathtt{a}) \to \{q_2, q_3, q_5\}$$
$$(\{q_1, q_4\}, \mathtt{a}) \to \{q_4, q_5\}$$

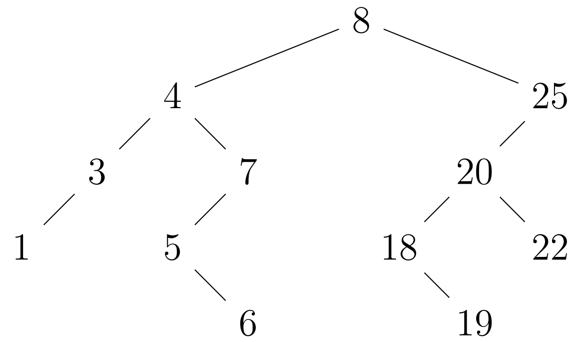
Mi lehet M-ben a δ állapotátmeneti függvény értéke az alábbi helyeken?

   (a) $\delta(q_1, \mathtt{a})$

   (b) $\delta(q_4, \mathtt{a})$

   (Az összes lehetőséget adja meg!)

2. Az alábbi bináris keresőfán hajtsa végre a TÖRÖL(25), majd az eredményen a TÖRÖL(8) műveletet!



3. Adja meg a tanult módon za $A \to \mathtt{0}A\mathtt{0} \mid \mathtt{1}$ környezetfüggetlen nyelvtanhoz a generált nyelvet elfogadó veremautomatát, és írja le ennek egy számítását a `00100` szón!

4. Tekintsük az RH (részhalmazösszeg) problémának azt a változatát, amikor az adott számok mindegyikét akár kétszer is (de többször nem) felhasználhatjuk a kívánt összeg előállításához. Igazolja, hogy ez a módosított RH2 nyelv NP-ben van!

5. Egy piros-fekete fa fekete magassága 5, és tudjuk, hogy egyetlen piros csúcsa van. Legalább, illetve legfeljebb hány elemet tárolhat a fa?

6. Adott az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ egész számokból álló sorozat. Ebben olyan $a_{i_1}, a_{i_2} \ldots$ részsorozatot keresünk, melynek elemei egy 5 különbségű számtani sorozatot alkotnak (azaz az értékek sorban $x, x+5, x+10, x+15, \ldots$). Adjon $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust ami meghatározza a leghosszabb ilyen részsorozat hosszát!

7. Tegyük fel, hogy MAXKLIKK $\in$ P. Ezt felhasználva mutassa meg hogyan lehet tetszőleges G egyszerű gráfban polinom időben megtalálni

   (a) a legnagyobb teljes részgráf méretét!

   (b) magát a legnagyobb részgráfot!

8. Igazolja, hogy az alábbi nyelv környezetfüggetlen!

$$L = \{w : w = x_1 x_2 \cdots x_n \# y,\ n \geq 1,\ x_i \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}, \mathtt{2}\},\ y = \mathtt{0}^k,\ \text{ahol } k = \sum_i x_i \}$$

(Pl. $\mathtt{020001\#000} \in L$, $\mathtt{020002\#000} \notin L$, $\mathtt{000\#} \in L$)