Algoritmuselmélet ZH

2015. április 8.

1. Tekintsük az $f(n) = 10n^2 \log n + 7n\sqrt{n} + 2000 \log n + 1000$ függvényt. Adjon olyan c konstanst és olyan n_0 küszöbértéket, ami a definíció szerint mutatja, hogy az $f(n)$ függvény $O(n^3)$-ben van.

2. (a) Építsen kupacot az órán tanult lineáris idejű módszerrel a $7, 3, 5, 8, 10, 1, 6, 4$ tömbből. Minden lényegi lépés után rajzolja fel az aktuális állapotot.
(b) Szúrja be a kapott kupacba a 2-t az órán tanult algoritmussal.

3. Van-e olyan 10 belső csúcsot tartalmazó piros-fekete fa, amire a tárolt számokat az inorder és a preorder bejárás ugyanabban a sorrendben adja vissza?

4. A $h(x)$ hashfüggvénnyel, nyílt címzéssel beszúrjuk az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ számokat (ebben a sorrendben) egy $M > n$ méretű (kezdetben üres) hash táblába, először lineáris próbával, majd kvadratikus maradék próbával. A lineáris próba esetén ℓ darab ütközés történik, a kvadratikus maradék próbánál pedig k darab. (Ha egy elem több lépésben ütközik, akkor az több ütközésnek számít.)
(a) Lehetséges-e, hogy $k = 0$ és $\ell = n - 1$? (b) Lehetséges-e, hogy $k = 1$ és $\ell = n - 1$?

5. Egy országban nagy hagyománya van a tollaslabdázásnak, ezért az ország számos városában készülnek tollaslabda-csarnokot építeni. Ha egy városban új tollaslabda-csarnok épül, akkor ott mindenki boldog. Ismert, hogy a csarnoképítésre összesen legfeljebb M petákot akarnak költeni és ismert a szóba jövő n város mindegyikére az, hogy mennyibe kerül ott a helyi adottságoknak megfelelő csarnok (az i. városban ez m_i peták) és hogy hányan élnek az egyes városokban (p_i lakos az i. városban). Adjon algoritmust ami az M, $m_1, m_2, \ldots, m_n$ és $p_1, p_2, \ldots, p_n$ egész számok ismeretében $O(Mn)$ lépésben meghatározza, hogy mely városokban épüljenek meg a tollaslabda-csarnokok, ha azt akarjuk hogy a lehető legtöbb ember legyen az építkezések miatt boldog.

6. Éllistájával adott egy irányított G gráf, melynek minden csúcsa színes: piros, fehér vagy zöld színű. Adott a gráfban egy A csúcs, ami piros és egy B csúcs, ami zöld. Adjon $O(n + e)$ lépésszámú algoritmust. ami megtalálja a legkevesebb élből álló olyan utat A-ból B-be, amiben az első néhány csúcs piros, majd néhány (legalább egy) fehér csúcs után csupa zöld csúcs következik.

7. Egy középkori királyság úthálózata egy n csúcsú irányítatlan gráffal adott (a csúcsok a városok, az élek a köztük vezető utak). Az A városból szeretnénk a B városba árut vinni, de bizonyos városok csak akkor engednek át minket a terményünkkel ha vámot fizetünk nekik (az A és B városban nem kell vámot fizetnünk). A vám összege fix, nem függ az áru mennyiségétől, de a vám városonként más és más lehet. Adjon algoritmust, ami a városonkénti vámok és a gráf szomszédossági mátrixának ismeretében $O(n^2)$ lépésben meghatároz egy olyan útvonalat, amin a legkevesebb sarcot szedik be tőlünk.

8. Adjon $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust, ami egy n különböző egész számot tartalmazó tömbről eldönti, hogy van-e benne három olyan szám, amik közül az egyik a másik kettő átlaga. (Lassabb algoritmus maximum 4 pontot ér).

Algoritmuselmélet vizsga

2015. május 27.

1. (a) Írja le a 2-3 fa definícióját! (A műveleteket nem kell leírnia.)
(b) Milyen korlátok között lehet egy olyan 2-3 fa magassága, melyben n kulcsot tárolunk? Ne O-jelölést használjon, adjon pontos korlátokat. A korlátok helyességét nem kell bebizonyítania.

2. Írja le, hogy hogyan kell végrehajtani a keresést és a törlést, ha kettős hash-elést használunk.

3. Szemléltesse a Karp-redukció definícióját a 3-SZÍN$\prec$ MAXFTLEN visszavezetésen. Adja meg magát a visszavezetést és mutassa meg, hogy miért teljesülnek a redukció definíciójában levő feltételek.

4. Egy algoritmus lépésszámát az n hosszú bemeneteken jelölje $T(n)$.
Tudjuk, hogy $T(n) \leq T(n-1) + T(n-2) + 4$, ha $n \geq 3$ és $T(n) \leq 10$ ha $n < 3$.
Bizonyítsa be, hogy a fentiekből nem következik, hogy $T(n) = O(n)$.

5. Tegyük fel, hogy $P \neq NP$. Egy X eldöntési problémáról tudjuk azt, hogy $MAXKLIKK \prec X$ fennáll.
(a) Lehetséges-e, hogy $X =$ 3-SZÍN?
(b) Lehetséges-e, hogy $X =$ 2-SZÍN?

6. Igazolja vagy azt, hogy P-ben van vagy azt, hogy NP-teljes az alábbi eldöntési feladat:
Input: egy összefüggő, irányítatlan G gráf
Kérdés: Igaz-e, hogy vagy van G-ben kör vagy van G-ben Hamilton-út (a két dolog együtt is teljesülhet, a körnek nem kell Hamilton-körnek lennie).

7. Egy éllistájával adott, élsúlyozott DAG-ban néhány csúcsra sört tettünk (a többire nem). Az élsúlyok pozitívak és azt mutatják, hogy milyen távolságra vannak a csúcsok egymástól. Adjon algoritmust, ami $O(n+e)$ lépésben meghatározza a gráf mindegyik csúcsára, hogy mekkora távolságra van a csúcstól a legközelebbi elérhető sör. (A gráfban csak az élek irányításának megfelelően tudunk haladni. Egy sör elérhető egy csúcsból, ha irányított úton oda lehet jutni, az ilyen út hossza az élsúlyok összege.)

8. Fizetésünk egy részét Erzsébet-utalványban kapjuk, a lehetséges címletek: $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Amikor fizetni szeretnénk a boltban 123456 forintot, akkor látjuk, hogy készpénz és bankkártya nincs nálunk, Erzsébet-utalványból viszont nem tudnak visszaadni. Szeretnénk eldönteni, hogy milyen címletű utalványból mennyit használjunk, hogy kifizessük a 123456 forintot és a lehető legkevesebbet bukjuk (azaz a fizetett összeg minél közelebb legyen 123456-höz.) 200000 forintnál többet nem fizetünk, akkor inkább nem vásárolunk most. Adjon $O(n)$-es algoritmust a legjobb megoldás megkeresésére. (Az egyes címletekből sok példánnyal rendelkezünk, mindegyikből van legalább 200000 értékű utalványunk.)

Algoritmuselmélet vizsga

2015. június 10.

1. (a) Írja le, hogy irányított gráf mélységi bejárásánál mit jelentenek az alábbi fogalmak: faél, előreél, visszaél, keresztél.
(b) Hogyan lehet a mélységi és befejezési számok segítségével a mélységi bejárás közben eldönteni, hogy az éppen vizsgált él a fenti négy kategória közül melyikbe esik? (Indoklás nem szükséges.)

2. (a) Írja le az euklideszi utazóügynök feladatot!
(b) Írja le az órán tanult c-közelítő algoritmust erre a feladatra és nevezze meg, hogy mi a c konstans értéke. (Azt nem kell igazolni, hogy a leírt algoritmus c-közelítő.)

3. Az órán tanult Bellman-Ford algoritmus úgy határozza meg egy pontból az összes többibe a legrövidebb út hosszát egy n csúcsú gráfban, hogy eközben egy $n-1$ soros és n oszlopos táblázatot tölt ki.
(a) Hogyan kell kitölteni az első sort? Miért?
(b) Írja le az általános képletet, amivel az i. ($i \geq 2$) sort ki lehet tölteni. Magyarázza el a használt jelöléseket és indokolja meg, hogy miért helyes a képlet.

4. Egy 2-3 fában az első 81 pozitív egész számot tároljuk (azaz 1-től 81-ig), a fában minden nem-levél csúcsnak három gyereke van. Mik a gyökérben levő kulcsok?

5. Egy irányítatlan, élsúlyozott, összefüggő, egyszerű gráfban az élsúlyozást a $c : E \to \mathbb{R}$ függvény adja meg.
(a) Igaz-e, hogy ha egy $c(e)$ élsúly egyedi (nincs másik él, aminek ugyanekkora a súlya), akkor ez az e él a gráf minden minimális súlyú feszítőfájában benne van?
(b) Igaz-e, hogy ha egy e él a gráf minden minimális súlyú feszítőfájában benne van, akkor $c(e)$ egyedi?

6. Az X eldöntési feladatról annyit tudunk, hogy $coNP$-ben van. Mely(ek) igaz(ak) az alábbi állítások közül? ($\overline{H}$ a Hamilton-kör eldöntési probléma komplementerét jelöli.)
(a) Lehetséges, hogy $X \prec \overline{H}$.
(b) Biztosan igaz, hogy $X \prec \overline{H}$.

7. Igazolja vagy azt, hogy P-ben van vagy azt, hogy NP-teljes az alábbi eldöntési feladat: az inputként kapott n darab $a_1, \ldots, a_n$ pozitív egész számról azt kell eldönteni, hogy ki lehet-e választani közülük legfeljebb 2015-öt úgy, hogy ezek összege 2^{2015} legyen.

8. Egy élsúlyozott DAG-ban minden csúcs vagy piros vagy fehér. Adott két kijelölt piros csúcs, s és t, szeretnénk megtalálni a legrövidebb olyan utat s-ből t-be, amin legfeljebb egy fehér csúcs szerepel. Adjon olyan algoritmust, ami $O(n+e)$ lépésben meghatározza egy ilyen legrövidebb út hosszát.

Algoritmuselmélet vizsga

2015. június 17.

1. (a) Ha egy kupacot fával reprezentálunk, akkor mi az előírás a fa alakjára? Mi a kupactulajdonság?
(b) Mennyi egy n csúcsot tartalmazó kupac magassága? (Bizonyítani nem kell).
(c) Írja le, hogy hogyan kell a beszúrást végrehajtani egy fával reprezentált kupacban.

2. Írja le a radixrendezés algoritmusát. Milyen alakú inputokra lehet használni? Mennyi az eljárás lépésszáma? A ládarendezést nem kell részetesen leírnia, az eljárás jóságát nem kell indokolni, de a használt jelöléseket magyarázza el.

3. (a) Írja le a Ládapakolás feladatot és megoldására tanult 2-közelítő algoritmust.
(b) Amikor azt bizonyítottuk, hogy ez az algoritmus 2-közelítő, akkor az optimális megoldásra (OPT) adtunk egy alsó becslést. Mi ez és miért igaz?

4. Az alábbi hash-táblában kitöröljük a 11-et, majd beszúrunk egy számot, eközben k ütközés történik. Mekkora lehet k legnagyobb értéke, ha lineáris próbát használunk?

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	2		4	16	6			9	10

5. Bizonyítsa be, hogy az alábbi eldöntési probléma $coNP$-ben van.
Input: egy irányítatlan, élsúlyozott, egyszerű G gráf
Kérdés: Igaz-e, hogy G minden körének összsúlya legalább 2015?

6. Egy város térképe egy n csúcsú, irányítatlan, élsúlyozott gráffal adott. A gráf pontjai csomópontokat reprezentálnak, az élek ezek között vezető közvetlen utakat, az élsúlyok pedig a megfelelő útszakasz hosszát adják meg méterben. Egy operációs rendszer új verzióját ablakokat ábrázoló óriásplakátokon hirdetik a városban, a plakátok a város néhány csomópontjában vannak. Az operációs rendszert gyártó cég megneszelte, hogy egyesek pingvineket akarnak a plakátokra festeni, ezért őrizni szeretné a plakátokat, de csak k egységet tudnak felállítani ($n \geq k \geq 2$). (Ez kevesebb, mint ahány plakát van.) Azt szeretnék elérni, hogy úgy helyezzék el az egységeket k csomópontba, hogy mindegyik plakátjuktól legfeljebb 500 méterre legyen figyelő egység. (Két csomópont távolsága a köztük vezető legrövidebb gráfbeli út hossza.) Adjon $O(n^{k+2})$ lépésszámú algoritmust, ami talál egy jó elhelyezést vagy szól, ha nincs ilyen.

7. Igazolja, hogy vagy azt, hogy P-ben van vagy azt, hogy NP-teljes a PARTÍCIÓ feladat alábbi változata: inputként adott $n \geq 2$ darab pozitív egész számokból álló $S = \{s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n\}$ halmazról kell eldönteni, hogy van-e olyan partíciója S-nek S_1 és S_2 részhalmazra, melyre igaz, hogy $s_1 \in S_1$, $s_2 \in S_2$, és az S_1-beli és S_2-beli számok összege megegyezik.

8. Egy $2n \times 2n$-es táblázat minden mezőjében egy egész szám van. Adjon $O(n^3)$-ös algoritmust, ami megkeresi a legnagyobb összsúlyú $n \times n$-es, négyzet alakú részt a táblázatban. Egy résztáblázat összsúlya a benne szereplő számok összege.

Algoritmuselmélet vizsga

2015. június 19.

1. (a) Írja le a piros-fekete fa definícióját!
   (b) Adjon felső korlátot egy n kulcsot tároló piros-fekete fában való keresés lépésszámára, használja az O jelölést. (A korlát helyességét nem kell belátnia.)

2. (a) Írja le Prim algoritmusát, amivel minimális súlyú feszítőfát lehet keresni.
   (b) A Prim algoritmus kupacos-éllistás implementációjában mit tárolunk a kupacban? A kupacépítésen kívül milyen és legfeljebb hány kupacműveletet hajtunk végre egy n csúcsú, e élű gráfon való futtatáskor?
   (c) Mennyi a kupacos-éllistás implementáció teljes lépésszáma? (Indokolni nem kell.)

3. Ebben a kérdésben a Floyd algoritmussal kapcsolatos kérdésekre kell válaszolnia (ez az algoritmus az összes pontpárra meghatározza a legrövidebb utak hosszát).
   (a) Írja le, hogy mit jelölnek az algoritmus k. ciklusában kiszámolt $F_k[i, j]$ mennyiségek.
   (b) Írja le, hogy milyen képlettel lehet az F_k értékeket kiszámolni az F_{k-1}-es értékekből és magyarázza el, hogy miért helyes ez a képlet.

4. Egy város úthálózata szomszédossági mátrixával adott, n csúcsú irányított gráffal írható le. Az élek súlyozottak és azt adják meg, hogy átlagosan mennyi idő alatt lehet az élnek megfelelő útszakaszon autóval végigmenni. A város egy kijelölt A pontjából egy másik kijelölt B pontjába szeretnénk gyors eljutást biztosítani. 2015 útszakasz kivételével az útszakaszok kétirányúak (ekkor mindkét irányban van egy-egy él, ugyanazon élsúllyal), de van 2015 egyirányú szakasz, ezek közül szeretnénk most egyet kétirányúvá tenni. Melyik legyen ez az él, ha azt szeretnénk, hogy az A-ból B-be eljutás a lehető leggyorsabbá váljon? (Az új kétirányú útszakasz élsúlya mindkét irányban ugyanaz lesz, ami az egyirányúé volt.) Adjon algoritmust, ami meghatározza ezt az élet $O(n^2)$ idő alatt.

5. Adott három rendezett tömb, A_1, A_2, és A_3. Mindhárom tömb n elemet tartalmaz, az elemek mind különbözőek. Adjon olyan csak összehasonlításokat használó algoritmust, ami e három rendezett tömbből felépít egy bináris keresőfát $O(n)$ összehasonlítással vagy lássa be, hogy nem létezik ilyen.

6. Tegyük fel, hogy $P \neq NP$ és legyen IP az egészértékű lineáris programozás probléma és X az az eldöntési probléma, amikor egy gráfról azt kell eldönteni, hogy legfeljebb 7 összefüggő komponensből áll-e. Az alábbi Karp-redukciók közül melyek lehetségesek?
   (a) IP$\prec$ SAT
   (b) $X \prec$ SAT

7. Igazolja vagy azt, hogy P-ben van vagy azt, hogy NP-teljes az alábbi eldöntési feladat: egy irányítatlan G gráfról azt kell eldönteni, hogy két diszjunkt V_1 és V_2 részre osztható-e a csúcshalmaza úgy, hogy mind a V_1, mind a V_2 csúcshalmaz által feszített részgráfban van Hamilton-kör. (Egy V_i csúcshalmaz által feszített részgráf az eredeti gráfnak pontosan azokat az éleit tartalmazza, melyek mindkét végpontja V_i-ben van.)

8. Egy online kurzusokat kínáló oldalon n darab minket érdeklő kurzus van. Minden kurzusra ismert, hogy melyik napon kezdődik és melyik napig tart. Egyszerre csak egy kurzust szeretnénk hallgatni (az még lehetséges, hogy az egyik kurzus utolsó napja egybe esik egy másik választott kurzus kezdőnapjával). Szeretnénk a lehető legtöbb kurzust kiválasztani így, de van egy kétrészes kurzus is (a második rész később van, mint az első), amit mindenképpen fel akarunk venni (mindkét részét). Adjon algoritmust, ami $O(n^2)$ lépésben kiválasztja a lehető legtöbb kurzust a fenti feltételekkel.