Algoritmuselmélet zárthelyi

2014. március 31.

1. Legyen $f(x) = \max(x^3 - 10x^2 + 110x; x^2 + 100x)$ és $g(x) = 2^{3\log_2(x)} + x^2$.
   a) Igaz-e, hogy $f = O(g)$? b) Igaz-e, hogy $g = O(f)$?

2. Két teherautóval n darab ládát szeretnénk elszállítani. A ládák súlyai $s_1, s_2, \ldots, s_n$ egész számok. Adj olyan algoritmust, ami meghatározza, hogyan kell elhelyezni a ládákat úgy, hogy a két teherautóra rakott összsúly különbsége minimális legyen! Az algoritmus lépésszáma legyen $O(n \cdot w)$, ahol $w = \sum_{i=1}^{n} s_i$.

3. Legyenek a G gráf pontjai a háromdimenziós tér azon rácspontjai, amelyeknek minden koordinátája 0 és m között van. Két pont pontosan akkor legyen szomszédos, ha egyik koordinátájuk pontosan 1-gyel tér el, a másik két koordinátájuk megegyezik. (Például $(2, 3, 4)$ és $(2, 4, 4)$ szomszédosak, de $(2, 7, 4)$-el nem szomszédos egyik sem.) Mekkora lesz a $(0, 0, 0)$ pontból indított szélességi keresőfa mélysége?

4. A Dijkstra és a Bellman-Ford algoritmus is úgy működik, hogy amikor meghatározza az adott pontba mutató legrövidebb út hosszát, akkor valójában felfedezett egy ekkora hosszúságú legrövidebb utat. Adj példát olyan irányított gráfra, melyben minden élen különböző, egész, pozitív súlyok vannak, és a Dijsktra illetve Bellman-Ford két különböző legrövidebb utat talál az x pontból az y pontba!

5. Az $A[1 : 2n]$ tömb egy kupacot reprezentál.
   a) Igaz-e, hogy az $A[1 : n]$ tömb biztosan egy kupacot reprezentál?
   b) Igaz-e, hogy az $A[n + 1 : 2n]$ tömb biztosan egy kupacot reprezentál?

6. A $B[1 : n]$ tömb különböző egészeket tartalmaz. A $B[i]$ elem *lokális minimum*, ha $B[i - 1] > B[i]$ és $B[i] < B[i + 1]$ teljesül ($B[1]$ ill. $B[n]$ elég, ha az egy szomszédjánál kisebb). Adj algoritmust egy lokális minimum megkeresésére, mely legrosszabb esetben $O(\log n)$ összehasonlítást használ! (Ha több lokális minimum van, ezek közül mindegy melyiket találjuk meg.)

7. Az $1, 2, 3, 4, 5, 8, 10, 9, 7, 6$ tömböt gyorsrendezéssel rendezzük, amit kétféleképpen is végrehajtunk. Az egyik futtattatás során mindig az éppen rendezendő tömb első elemét választjuk véletlen elemnek a partíciós lépéshez, a másik futtatás során mindig a tömb utolsó elemét. Melyik esetben fogunk kevesebb összehasonlítást végezni?

8. Egy piros-fekete fában 13 elemet tárolunk. Minimálisan hány piros csúcs van a fában? (A teljes megoldáshoz be kell látni egy megfelelő k-ra, hogy lehet k piros, és azt is, hogy nem lehet $k - 1$ piros.)

Algoritmuselmélet vizsga

2014. május 29.

1. Milyen elemek rendezésére használható a radixrendezés? Írja le a radixrendezés algoritmusát! Mennyi az algoritmus lépésszáma? (Sem az algoritmus helyességét, sem a lépésszámot nem kell indokolni.)

2. Írja le a bináris keresőfa definícióját! Milyen értékek között változhat egy n csúcsú bináris keresőfa magassága? (Nem kell indokolni a korlátokat.) Írja le, hogy hogyan kell keresni és törölni egy bináris keresőfában!

3. Adja meg az alábbi, a minimális feszítőfák keresésére szolgáló piros-kék algoritmusban szereplő fogalmak definícióját: takaros színezés, kék szabály. Bizonyítsa be, hogy a kék szabály alkalmazásával takaros színezésből takaros színezést kapunk.

4. Egy hosszú-hosszú nyári szünet alatt több munkát szeretnénk elvállalni. Minden potenciális munkáról tudjuk, hogy mely egymást követő napokon kell azzal dolgoznunk (ha elvállaljuk az adott feladatot) és azt is tudjuk, hogy mekkora bevételünk származik a munka teljesítéséből. Egyszerre csak egy munkát tudunk végezni, azaz az elvállalt munkák intervallumai nem lehetnek átfedőek. Adjon algoritmust, ami eldönti, hogy mely munkákat vállaljuk el, ha az összbevételünket maximalizálni akarjuk. Az algoritmus lépésszáma n potenciális munka esetén legyen $O(n^2)$.

5. Kvadratikus maradék próbával hash-elünk egy $M = 127$ méretű hash-táblába, a $K \bmod M$ hash függvényt használva. A kulcsok a következő sorrendben érkeznek: $M, 2M, 3M, \ldots M \cdot M$, ezzel a tábla meg is telik. Igaz-e, hogy az így kapott tömb egy kupacot reprezentál?

6. Egy 5 csúcsú gráfon futtatva a Floyd-algoritmust, az utolsó frissítés előtt a következő mátrixunk van. Hogyan néz ki az utolsó frissítés után a mátrix?

$$F_4 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & -2 & 0 \\ \infty & 0 & 1 & -4 & -2 \\ \infty & \infty & 0 & 1 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 2 \\ -3 & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

7. Bizonyítsa be, hogy ha a MAXKLIKK eldöntési probléma komplementere NP-teljes, akkor $NP \subseteq coNP$.

8. Igazolja, hogy az alábbi eldöntési feladat NP-teljes:

   Input: $s_1, s_2, \ldots, s_n$ pozitív egész számok

   Kérdés: Van-e olyan $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ indexhalmaz, melyre $|\sum_{i \in I} s_i - \sum_{i \notin I} s_i| \leq 1$ fennáll?

Algoritmuselmélet vizsga

2014. június 5.

1. Adja meg a topologikus sorrend definícióját! Hogyan lehet a mélységi bejárással találni egy topologikus sorrendet?

2. Mi a Ládapakolás eldöntési feladat? Hogyan működik a First Fit közelítő algoritmus? Bizonyítsa be, hogy ez az algoritmus 2-közelítő!

3. Írja le a kupacos rendezést. Mennyi a kupacos rendezés lépésszáma n rendezendő elem esetén és miért? (A kupacműveleteket nem kell részleteznie, ezek lépésszámát nem kell belátnia.)

4. Éllistájával adott egy irányított, élsúlyozott gráf, melyben nincsen negatív kör. Adjon $O(n^4)$ lépésszámú algoritmust egy olyan kör megkeresésére, ami a legalább három élből álló körök között a legrövidebb összsúlyú.

5. Egy város úthálózata egy élsúlyozott irányítatlan gráf írja le, ami mátrixos formában adott. Az élek súlyai a csomópontok között vezető közvetlen utak felújítási költségét adják meg. A város polgármestere fel szeretné újítani a házától a városházára vezető legrövidebb utat, de hogy ez ne legyen nagyon feltűnő, ezért egy nagyobb útfelújítást tervez. Mely éleknek megfelelő szakaszokat kellene felújítani, ha annak kell teljesülnie, hogy:
   (i) bárhonnan bárhova el lehet jutni felújított úton (hogy mindenki örüljön a városban)
   (ii) a polgármester házától a városházára vezető legrövidebb út minden része fel lesz újítva
   (iii) a fenti két feltételt betartva a legkisebb költségű felújítást szeretnénk.
   Adjon $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust, ahol n a gráf pontjainak száma. (Az ismert, hogy a felújítandó legrövidebb út mely élekből ál össze, ezt nem kell megkeresnünk).

6. Kettős hash-elést használva akarunk beszúrni elemeket egy kezdetben üres, 11 elemű hash táblába. Első hash függvénynek a K mod 11 függvényt, második hash-függvénynek az
1+(K mod 6) függvényt választjuk. Hogyan változik a tábla a $3, 6, 14, 9, 25$ kulcsok ezen sorrendben történő beszúrása során?

7. Magyarázza el, hogy melyik ismert NP-teljes feladat egészértékű lineáris programozási feladatként való megfogalmazása a következő:
Adott $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots b_n, C$ egész számok esetén maximalizáljuk $(x_1a_1+x_2a_2+\ldots x_na_n)$-t a következő feltételek mellett: $0 \leq x_i \leq 1$ minden $1 \leq i \leq n$ esetén, továbbá $\sum_{i=1}^{n} x_ib_i \leq C$.

8. Igazolja, hogy az alábbi eldöntési feladat NP-teljes:

   Input: G irányítatlan gráf

   Kérdés: Van-e olyan 2014 olyan csúcsa G-nek, melyre igaz, hogy a G-ből ezen csúcsok elhagyásával keletkező gráfban van Hamilton-kör?

Algoritmuselmélet vizsga

2014. június 12.

1. Ebben a feladatban kupacokkal kapcsolatos kérdésekre kell válaszolnia. Mi a kupactulajdonság? Mi a kapcsolat egy kupac fás és tömbös reprezentációja között? Hogyan kell megvalósítani a MINTÖR műveletet fás reprezentáció esetén?

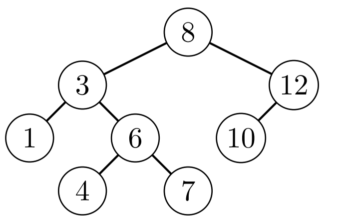
2. Írja le a Bellman-Ford algoritmus (legkisebb összsúlyú utak megtalálása egy pontból mindenhova) lényegét alkotó rekurziós formulát, magyarázza el a benne szereplő jelöléseket és indokolja meg, hogy a formula miért helyes.

3. Adja meg az alábbi eldöntési problémák pontos definícióját: MAXKLIKK, PARTÍCIÓ, PRÍM. Lássa be egyikükről, hogy NP-beli és lássa be egyikükről, hogy $coNP$-beli!

4. Egy n-szer n-es táblázat minden mezője egy egész számot tartalmaz (negatív számok is lehetnek). A bal felső sarokból szeretnénk a jobb alsó sarokba eljutni úgy, hogy egy lépésben vagy egy sorral lejjebb vagy egy oszloppal jobbra lépünk. Egy ilyen út értéke az úton szereplő számok szorzata. Adjon $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust a legnagyobb értékű út megkeresésére.

5. Adott két, egész számokat tartalmazó tömb: $A[1:n]$ és $B[1:m]$, ahol $n \leq m$. (Az egyes tömbökön belül nincs ismétlődés.) Adjon $O(m \log n)$ lépést használó algoritmust, ami meghatározza, hogy hány olyan szám van, ami mindkét tömbben benne van!

6. Az alábbi bináris keresőfából a bináris keresőfáknál tanult eljárással kitöröljük a 12-es kulcsot. Igaz-e, hogy a szükséges üres levelek beszúrása után a fa csúcsai piros és fekete színnel kiszínezhetők úgy, hogy egy piros-fekete fát kapjunk?



7. Igazolja vagy cáfolja, hogy az alábbi eldöntési probléma NP-teljességéből következne, hogy $P = NP$.

   Input: G irányítatlan gráf

   Kérdés: Igaz-e, hogy G összefüggő komponenseinek száma legalább 17?

8. Igazolja, hogy az alábbi eldöntési feladat NP-teljes:

   Input: G_1, G_2, G_3 irányítatlan gráfok

   Kérdés: Igaz-e, hogy G_1-nek van G_2-vel és G_3-mal izomorf részgráfja is?

Algoritmuselmélet vizsga

2014. június 19.

1. Mi a 2-3 fa definíciója? Milyen korlátok között mozoghat egy n kulcsot tároló 2-3 fa magassága? (Bizonyítani nem kell.)

2. Mondja ki és bizonyítsa be az összehasonlítás-alapú rendezések lépészámának alsó korlátjáról szóló tételt!

3. Írja le részletesen, hogy hogyan kell megvalósítani a beszúrást és a keresést kettős hash esetén!

4. Dijkstra algoritmusa nem feltétlenül találja meg a legrövidebb utat, ha van a gráfban negatív súlyú él. Bizonyítsa be, hogy ha egy irányított, élsúlyozott gráfban csak egyetlen negatív súlyú él van, ami ráadásul elvágóél (azaz elhagyásával nem minden pont érhető el az s kiindulópontból), akkor Dijsktra algoritmusa minden pontba helyesen találja meg a legrövidebb utakat az s kiindulópontból!

5. Az univerzumban számos helyen találhatók csillagkapuk, melyek között féregjáratokon lehet közlekedni. Bármely két csillagkapu között létesíthető kapcsolat, de ehhez energiára van szükség annál a kapunál, ahonnan a járatot indítjuk. Ismerjük tetszőleges két csillagkapura, hogy mekkora energia szükséges egy köztük vezető féregjárat indításához és azt is ismerjük, hogy az egyes csillagkapuknál mekkora energiaforrások állnak rendelkezésünkre. Ezen ismeretek birtokában határozzuk meg, hogy a Földön levő kettő csillagkapu valamelyikétől el tudunk-e jutni az Atlantiszon levő csillagkapuhoz és ha igen, akkor legalább hány féregjáratot kell ehhez használnunk egymás után.

6. Az alábbi szomszédossági listával adott gráfon (ahol x és y ismeretelen, nem feltétlenül egész élsúlyok) Prim algoritmusát futtattuk.
   $\mathbf{A}: B(1), C(x); \mathbf{B}: A(1), C(2), D(x); \mathbf{C}: A(x), B(2), D(y), E(y); \mathbf{D}: B(x), C(y), E(1);$
   $\mathbf{E}: D(1), C(y)$
   Mik lehetnek x és y lehetséges értékei, ha tudjuk, hogy az A csúcsból indított algoritmus az AB, BD, DE, BC éleket választotta ki, ebben a sorrendben.

7. Igazolja vagy cáfolja, hogy az alábbi eldöntési probléma NP-teljességéből következne, hogy $P = NP$.

   Input: G irányítatlan gráf

   Kérdés: Igaz-e, hogy G-ben van 2014 független csúcs, úgy, hogy a gráf minden más csúcsa legfeljebb két éllel elérhető valamelyikből?

8. Igazolja, hogy az alábbi eldöntési feladat NP-teljes:

   Input: G_1, G_2 irányítatlan gráfok és k pozitív egész szám

   Kérdés: Igaz-e, hogy a két gráfnak van közös (egymással izomorf) k csúcsú részgráfja?