# Algoritmuselmélet zárthelyi

2013. április 3.

1. Mi az a legkisebb $r$ racionális szám, melyre teljesül, hogy $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n} = O(n^r)$?

2. Egy $A[i, j]$ $n \times n$-es táblázat minden mezőjébe egy egész szám van írva (nem feltétlenül csak pozitívak). Adjon $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust, ami eldönti, hogy melyik az a téglalap alakú része a táblázatnak, melynek bal felső sarka egybe esik a nagy táblázat bal felső sarkával és benne az elemek összege az (egyik) legnagyobb. (Vagyis olyan $k, l$-t keresünk, amire $\sum_{\substack{i \leq k, \\ j \leq l}} A[i, j]$ maximális.)
*(Feltételezzük, hogy az alapműveletek bármekkora számokkal 1 lépésben elvégezhetőek.)*

3. Kaphatjuk-e az $1, 7, 3, 6, 11, 15, 22, 17, 14, 12, 9$ számsorozatot úgy, hogy egy (a szokásos rendezést használó) bináris keresőfában tárolt elemeket posztorder sorrendben kiolvasunk?

4. Adjacencia-mátrixával adott $n$ csúcsú, irányított gráfként ismerjük egy város úthálózatát. El szeretnénk jutni $A$ pontból $B$ pontba, de sajnos minden csomópontban várnunk kell a nagy hóesés miatt, a várakozás hossza minden csomópontra ismert és független attól, hogy merre akarunk továbbmenni. Adjon algoritmust, ami $O(n^2)$ lépésben eldönti, hogy merre menjünk, hogy a lehető legkevesebbet kelljen várni összességében. *(A csómópontok közötti utak hosszának megtétele a várakozáshoz képest elhanyagolható időbe telik, tekintsük 0-nak. $A$-ban és $B$-ben nem kell várakozni.)*

5. Adjacencia-mátrixával adott $n$ csúcsú, élsúlyozott, irányítatlan gráfként ismerjük egy ország úthálózatát (a csomópontok a városok, az élek a közvetlen összeköttetések a városok között). Az élek súlya a városok közti távolságot adja meg. (Feltehetjük, hogy a távolságok egészek.) Adjon $O(n^6)$ lépésszámú algoritmust, ami eldönti, hogy lehetséges-e úgy kiválasztani öt várost, hogy ezektől bármely más város legfeljebb 50 kilométerre van. *(Ezekbe a városokba lenne érdemes hókotrókat telepíteni.)*

6. Egy tömbben adott $n$ darab 0-tól különböző egész szám (lehetnek negatívak is köztük) és adott egy $k$ egész szám is. Adjon $O(n \log n)$ lépésszámú algoritmust, ami eldönti, hogy melyik az a $k$ elem a tömbben, melyek szorzata maximális.

7. Az $A[1..2013]$ tömbben egy kupac adatstruktúrát tárolunk, minden tárolt elem különböző. Tudjuk, hogy ebben a kupacban a legnagyobb elem $A[i]$. Határozza meg $i$ összes lehetséges értékét!

8. Igaz-e, hogy egy piros-fekete fa tetszőleges belső fekete csúcsához tartozó részfa (az a részfa, aminek ez a fekete csúcs a gyökere) is egy piros-fekete fa? Igaz-e ugyanez egy tetszőleges belső piros csúcshoz tartozó részfára?

---

# Algoritmuselmélet vizsgazárthelyi

2013. május 23.

1. Tudjuk, hogy az $f(n), g(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvényekre igaz, hogy $f(n) = \Omega(\log n)$ és $g(n) = \Theta(n^4)$. Lehetséges-e, hogy
(a) $f(n) = \Theta(g(n))$?
(b) $g(n) = O(f(n))$?
(Ez két, egymástól függetlenül megválaszolandó kérdés.)

2. Távmunkában fogunk dolgozni mostantól $n$ napon át. Nem kell minden nap bejárnunk, de az alábbi három feltételt be kell tartanunk :
(i) két egymást követő benti munkanap között legfeljebb $k$ nap telhet el,
(ii) az $n$ nap során legfeljebb egyszer maradhatunk pontosan $k$ napig távol,
(iii) az első és az $n$. napon be kell mennünk.
Sajnos a kék metróval járunk dolgozni, ami hol jár, hol nem, de szerencsére megjósolták nekünk, hogy a következő $n$ napban mely napokon lesz üzemzavar, ezeken a napokon nem akarunk dolgozni menni (az első és az utolsó napon nem lesz üzemzavar).
Adjon algoritmust, ami a jóslás eredményének ismeretében $O(nk)$ lépésben meghatározza, hogy legkevesebb hány bemenéssel tudjuk megúszni ezt az $n$ munkanapot.

3. Egy iskola minden osztályában anyák napi ünnepséget szeretnének tartani, az ünnepségeknek délután öt órakor kell kezdődniük. Az iskolába azonban testvérpárok is járnak, ezért azt szeretnék elérni, hogy a testvérek ünnepségei ne egy napon legyenek. Adjon algoritmust, ami annak ismeretében, hogy ki kinek a testvére és melyik gyerek melyik osztályba jár, eldönti, hogy lehetséges-e két napra elosztani az összes ünnepséget. Az algoritmus lépésszáma $O(n^2)$ legyen, ha az iskolában $n$ osztály van. (Egy osztályban legfeljebb 32 gyerek van, inputként a testvérpárok listáját kapjuk, ezen jelezve van, hogy melyik testvér melyik osztályba jár.)

4. Hány éle van legalább annak a 6 pontú, egyszerű, irányítatlan gráfnak, melyen a Dijkstra algoritmust futtatva a D tömb kezdetben így néz ki: 0, 2, 5, 1, $\infty$, 7; a végén pedig így néz ki: 0, 2, 4, 1, 10, 7? Mutasson egy konkrét példát a szélsőértéket elérő gráfra és lássa be, hogy ez valóban szélsőérték.

5. Egy kupac elemeit preorder bejárás szerint kiolvasva az alábbi számsorozatot kapjuk: 1, 17, 19, 21, 22, 31, 37, 2, 8, 3. Rekonstruálható-e ebből a kupac?

6. Egy $k$ elemű számhalmaz mediánján a rendezés szerinti $\lceil k/2 \rceil$-edik elemet értsük. Tervezzen olyan adatstruktúrát, amiben $n$ elem tárolása esetén a BESZÚR és MEDIÁNTÖRÖL értelemszerű eljárások minden esetben végrehajthatóak $O(\log n)$ lépésben.

7. Egy bináris keresőfában $n$ különböző egész számot tárolunk. Adjon algoritmust, ami $O(n)$ lépésben eldönti, hogy van-e a tárolt számok között két olyan, melyek különbsége 2013.

8. Egy piros-fekete fában minden gyökértől különböző belső csúcs színét ellentétesre változtattuk és így is egy piros-fekete fát kaptunk. Jellemezze azokat a piros-fekete fákat, amikre ez megtörténhetett!

---

## Algoritmuselmélet vizsga

2013. május 30.

1. Ebben a feladatban a Floyd algoritmussal kapcsolatos kérdésekre kell válaszolnia. (A Floyd-algoritmus egy gráfban minden pontpárra meghatározza a köztük levő legrövidebb út hosszát.)
(a) Mit jelöl az $F_k$ mátrix $F_k[i,j]$ eleme?
(b) Hogyan kell kiszámolni az $F_{k-1}$ mátrixból az $F_k$ mátrixot?
(c) Igazolja, hogy ez a kiszámítási mód helyes!
(d) Mennyi a lépsszáma a (b) lépés egyszeri végrehajtásának? (A lépésszámot nem kell igazolni.)

2. Adja meg a 2-3 fa definícióját! Adjon felső becslést a fa szintszámára $n$ tárolt elem esetén, állítását bizonyítsa is!

3. Adjon meg egy MAXKLIKK$\prec$ RÉSZGRÁFIZO Karp-redukciót és mutassa meg, hogy ez valóban Karp-redukció!

4. Van egy tábla ($n \times m$ kockából álló) mogyorós csokink. Az $A$ $n \times m$-es mátrixban adott, hogy az egyes kockákban hány mogyoró van (a mogyorók nem lógnak át egyik kockából a másikba). Két gyerek akar osztozkodni a csokin, úgy, hogy a csokit kétfelé törik (egyenes vonal mentén, párhuzamosan a tábla valamelyik szélével). Egy osztozkodás igazságtalansági faktorát a következőképpen kaphatjuk: ha az egyik darabban $k_1$ kocka csoki és $m_1$ darab mogyoró van, a másikban pedig $k_2$ kocka csoki és $m_2$ darab mogyoró, akkor az igazságtalansági faktor $|(k_1 + m_1) - (k_2 + m_2)|$.
Adjon $O(nm)$ lépést használó algoritmust, ami eldönti, hogy melyik szétosztásnak a legkisebb az igazságtalansági faktora. (Egy lépésnek számít, ha kiolvasunk egy értéket az A mátrixból vagy ha összeadást illetve kivonást hajtunk végre két számon.)

5. Egy algoritmus lépésszámáról tudjuk, hogy $T(n) = T(\lfloor n/4 \rfloor) + O(n^2)$ és tudjuk azt is, hogy $T(1) = T(2) = T(3) = 1$. Bizonyítsa be, hogy $T(n) = O(n^2)$.

6. Egy ország $n$ kis szigetből áll. Szeretnénk néhány hajójáratot indítani a szigetek között úgy, hogy bárhonnan bárhova el lehessen jutni (esetleg átszállással). Ehhez ismerjük bármely két szigetre, hogy mennyibe kerül egy évben a hajójárat fenntartása közöttük illetve azt is tudjuk, hogy mekkora az itt várható éves bevétel. Adjon algoritmust, ami ezen adatok ismeretében $O(n^2)$ időben meghatározza, hogy hol indítsuk el a hajójáratokat, ha a lehető legnagyobb várható éves hasznot (vagy a lehető legkisebb veszteséget) szeretnénk elérni. (Egy szigeten egy hajóállomás van csak.)

7. Igaz-e, hogy ha egy $X$ eldöntési problémáról be tudnánk látni, hogy $X \in NP \setminus P$ (vagyis $X$ NP-ben van, de nincs P-ben), akkor 3-SZÍN$\notin P$?

8. Igazolja, hogy a következő eldöntési probléma P-ben van, vagy azt, hogy NP-teljes!

   **Input:** $G$ irányítatlan gráf

   **Kérdés:** Igaz-e, hogy mind a $G$-ben található legnagyobb független ponthalmaz, mind a $G$-ben található legnagyobb klikk is pontosan 2013 csúcsot tartalmaz?

---

## Algoritmuselmélet vizsga

2013. június 6.

1. Ebben a feladatban a mélységi bejárással kapcsolatos kérdésekre kell válaszolnia.
   (a) Adja meg a keresztél definícióját!
   (b) A mélységi bejárás során hogyan lehet a mélységi és a befejezési számok alapján felismerni a keresztéleket?
   (c) Bizonyítsa be, hogy irányítatlan gráf mélységi bejárásánál nincsenek keresztélek!

2. Milyen műveletek vannak a nyitott címzésű hash-elésnél? Hogyan kell megvalósítani a keresést, ha a nyitott címzésű hashelésnél kvadratikus maradék próbát használunk?

3. Adja meg az UNIÓ-HOLVAN adatszerkezet definícióját! (A fákkal való implementálást nem kell leírnia.) Mutassa meg, hogy mikor és hogyan használjuk az UNIÓ és a HOLVAN műveleteket a Kruskal algoritmusban!

4. Pista bácsi fel akar ugrálni egy $n$ hosszú, fekete illetve fehér fokokból álló csigalépcsőn. Legfeljebb $k$ fokot tud ugrani, de arra vigyáznia kell, hogy páros ($\geq 2$) sok foknyi ugrás után páratlan sokat és páratlan sok után mindig páros ($\geq 2$) sokat ugorjon. Adjon $O(nk)$ lépésszámú algoritmust, amely megmondja, hogy fel tud-e úgy ugrálni a csigalépcső tetejére, hogy csak egyféle színű lépcsőfokokat használ. (A lépcső fokai rendszertelenül vannak színezve, a színezést ismerjük.)

5. A hátizsákprobléma órán tanult algoritmusát futtattuk egy konkrét inputon, melyben 3 tárgy szerepel. Mi lehetett ez a konkrét input, ha az alábbi táblázat keletkezett?

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 10 | 10 | 10 | 10 |
| 2 | 0 | 0 | 5 | 5 | 10 | 10 | 15 | 15 |
| 3 | 0 | 0 | 5 | 5 | 13 | 13 | 18 | 18 |

6. Egy irányítatlan, élsúlyozott gráf az alábbi éllistával adott (zárójelben az élsúlyok): **A**:$B(1), D(3), E(2)$; **B**:$A(1), C(3), E(1)$; **C**:$B(3), D(y), E(3)$; **D**:$A(3), C(y), E(x)$; **E**:$A(2), B(1), C(3), D(x)$.
(a) Mi lehet $x$ és $y$ értéke, ha tudjuk, hogy az élsúlyok egész számok és azt is tudjuk, hogy a $B$ csúcsból indított Prim-algoritmus az alábbi sorrendben vette be az éleket: BE, ED, BA, BC.
(b) Mely éleket és milyen sorrendben választja ki a Kruskal-algoritmus? (Ha több lehetséges megoldás is van, akkor az összeset adja meg.)
(Az algoritmusok egyenlő élsúlyú élek közül véletlenül választanak.)

7. Létezik-e olyan $X$ eldöntési probléma, amire $X \notin NP$ és $X \prec SAT$ egyszerre fennáll?

8. P-ben van vagy NP-teljes az alábbi eldöntési probléma:
**Input:** irányítatlan $G$ gráf
**Kérdés:** Igaz-e, hogy $G$-ben vagy van Hamilton-út vagy $G$ 3 színnel színezhető?

---

## Algoritmuselmélet vizsga

2013. június 13.

1. Tegyük fel, hogy $f(n), g(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Mit jelent az, hogy $f(n) = \Omega(g(n))$? Mit jelent az, hogy $g(n) = O(f(n))$? Adjon részletes bizonyítást arra, hogy $n^4 + 5n^3 = O(n^5)$.

2. (a) Az $A[1:n]$ tömb elemeinek rendezésére mikor használhatunk ládarendezést?
(b) Írja le a ládarendezés algoritmusát és adja meg a lépésszámát! (Bizonyítani nem kell.)

3. Ebben a feladatban a Prim algoritmus naív (tömbös) implementációjával kapcsolatos kérdésekre kell válaszolnia. Mi az algoritmus során használt (az órán KÖZEL és MINSÚLY nevű) tömbök jelentése? Hogyan kell ezeket inicializálni? Hogyan kell ezeket a tömböket az algoritmus futása során frissíteni?

4. Adott egy élsúlyozott irányítatlan $G$ gráf, mely nem tartalmaz negatív összhosszúságú kört. A Floyd algoritmussal meghatározzuk az összes pontpárra a legrövidebb utak hosszát és közben azt tapasztaljuk, hogy a mátrix csak minden második frissítés során változik. Milyen felső becslést adhatunk ez alapján a kapott legrövidebb utak élszámára?

5. Városunkban trafikok fognak nyílni, összesen $3n$ darab, ezekre pályázatot írtunk ki. A pályázók között van $n$ barátunk, azt szeretnénk, ha mindegyikőjük pontosan 3 trafikot kapna (nem mindenki pályázott mindenhova). Adjon algoritmust, ami annak ismeretében, hogy melyik barátunk melyik trafikokra pályázott $O(n^3)$ lépésben eldönti, hogy eloszthatók-e a trafikok a fenti feltételekkel és ha igen, akkor javasol is egy elosztást.

6. Építsünk piros-fekete fát a következő elemek egymás utáni beszúrásával: $21, 32, 15, 64, 75$.

7. Lehetséges-e, hogy valamely $X$ eldöntési problámára $X \in NP$ és $HAM \prec X$ egyszerre fennálljon?

8. P-ben van vagy NP-teljes az alábbi eldöntési probléma:

   **Input:** irányítatlan $G$ gráf

   **Kérdés:** Igaz-e, hogy $G$ csúcsai lefedhetők két (nem feltétlenül azonos csúcsszámú) pontdiszjunkt teljes gráffal?

---

## Algoritmuselmélet vizsga

2013. június 20.

1. Írja le a kupacépítés algoritmusát. (Az építés során használt segédeljárásokat is írja le részletesen). Mennyi a kupacépítő eljárás lépésszáma, ha $n$ elemből építünk kupacot? (A lépészámot nem kell igazolni.)

2. Egy irányított gráfról mélységi bejárás segítségével szeretnénk eldönteni, hogy DAG-e. Mondja ki és bizonyítsa be a kapcsolódó tételt.

3. Írja le a piros-fekete fa definícióját!

4. A következő $n$ munkanap mindegyikén egy-egy munka érkezik hozzánk. Ha az $i$. munkát elvállaljuk, akkor azzal $h_i$ forintot keresünk, de a munka elvégzéséhez $n_i$ napra van szükségünk és így a munkafelvételi napot követő $n_i - 1$ napon nem tudunk újabb munkát elvállalni (ha egy munkát nem vállalunk el aznap, amikor érkezik, akkor arról végleg lemaradunk). Adjon algoritmust, ami a $h_i, n_i$ értékek ($1 \leq i \leq n$) ismeretében $O(n^2)$ lépésben eldönti, hogy mely munkákat vállaljuk el, hogy a hasznunk maximális legyen. (Az nem baj, ha az utolsó munka elvégzése nem fér bele az $n$ napba.)

5. Egy város úthálózatát egy adjacencia mátrixával adott $n$ csúcsú irányítatlan gráf írja le. A gráf csúcsai a csomópontoknak, az élek pedig a csomópontok közötti közvetlen utaknak felelnek meg, a mátrix megadja bármely két csomópontra az utazási időt autóval a közvetlen úton.
   Adott két (nem feltétlenül szomszédos) csomópont, $A$ és $B$, azt szeretnénk elérni, hogy nehezebb legyen $A$-ból $B$-be eljutni (azaz a leggyorsabb eljutási idő nőjön), ehhez egyetlen csomópont-pár között vezető közvetlen utat egyirányúvá tehetünk. Adjon $O(n^3)$ lépésszámú algoritmust, ami eldönti, hogy lehetséges-e ez (és ha igen, akkor javasol is egy olyan pontpárt, ahol az egyirányúsítást érdemes megtennünk.)

6. Gyorsrendezéssel akarunk rendezni, a rendezendő elemek száma $5m^4 \log m$.

   Igaz-e, hogy ekkor átlagosan $O(m^6)$ az összehasonlítások száma?

7. Jelölje $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ a következő eldöntési problémákat. Következik-e $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$-ból az, hogy P=NP?

   $\mathcal{A}$:
   **Input:** irányítatlan $G$ gráf, $k$ szám

   **Kérdés:** Igaz-e, hogy $G$-ben van $k$ csúcsú teljes részgráf?

   $\mathcal{B}$:
   **Input:** $G$ páros gráf, $k$ szám

   **Kérdés:** Igaz-e, hogy $G$-ben van $k$ élű párosítás?

8. P-ben van vagy NP-teljes az alábbi eldöntési probléma:

   **Input:** irányítatlan, $n$ csúcsú $G$ gráf és egy $k < n$ egész szám

   **Kérdés:** Igaz-e, hogy $G$ olyan különleges, hogy $G$-ben van $k$ független csúcs és $G$ csúcsai 3 színnel színezhetők?

---