Algoritmuselmélet zárthelyi
2012. március 26.

1. Tudjuk, hogy az $f(n), g(n)$ pozitív értékeket felvevő függvényekre igaz, hogy $f(n) = O(g(n))$. Következik-e ebből, hogy $2012^{\log n} + f(n) = O(\frac{1}{2012}n^{2012} + g(n))$?

2. Egy w méter széles folyón szeretnénk átkelni a folyó medrébe lerakott n darab cölöp segítségével. A cölöpök a folyó két partja között, a folyó partjára merőleges egyenes vonalban helyezkednek el, $0 < x_1 < x_2 < \ldots x_n < w$ méterre a kiindulási parttól (w és az összes x_i távolság egész szám). Az első lépésben egy métert ugorhatunk, utána pedig az igaz, hogy minden ugrás vagy pontosan egy méterrel nagyobb vagy pontosan egy méterrel kisebb, vagy ugyanakkora, mint az előző. Adjunk algoritmust, ami az x_i számok ismeretében $O(nw)$ lépésben eldönti, hogy át tudunk-e jutni a túlsó partra anélkül, hogy a vízbe esnénk.

3. Egy városban 17 busztársaság közlekedik, az egyes társaságok buszait csak a társaság saját buszbérletével lehet használni. Nekünk maximum két társaság bérletére van pénzünk (a bérletek ugyanannyiba kerülnek). A város buszhálózatát ismerjük: bármely két megállóra adott, hogy van-e közöttük közvetlen járat (amelyik közben nem áll meg máshol) és ha igen, akkor melyik társaság üzemelteti (lehet több társasásgnak is járata ugyanott). Adjunk $O(n^2)$ lépésszámú eljárást, ami n buszmegálló esetén eldönti, hogy melyik két bérletet vegyük meg, hogy a lehető legtöbb buszmegállóba el tudjunk jutni a lakásunkhoz legközelebb eső megállóból gyaloglás nélkül. (Az átszállások számára nincs korlátozás.)

4. Egy irányított gráf csúcshalmaza $\{A, B, C, D, E, F\}$, az élek és súlyaik pedig az alábbiak: $s(A, B) = 2$, $s(A, C) = 7$, $s(A, D) = 3$, $s(A, F) = 6$, $s(C, E) = 3$, $s(D, B) = -2$, $s(D, C) = -4$, $s(D, E) = -2$, $s(E, F) = 4$.
Futtassa ezen a gráfon a Bellman-Ford algoritmust az A csúcsból vett legrövidebb utak hosszának meghatározására.

5. Egy szalagon $n = 2^k$ különböző súlyú csomag várakozik, ezeket szeretnénk sorbarendezni súly szerint növekvően. Két eszközünk van ehhez: egy mérlegelő szerkezet, ami a sorban elöl álló és egy tetszőleges másik csomagról megmondja, hogy melyik a nehezebb (anélkül, hogy a csomagok helyzetén változtatna) és egy daru, ami tetszőleges csomagot a sor végére tud rakni (ekkor persze a hátrarakott csomag utáni csomagok mind egy-egy hellyel előrébb csúsznak). Adjon olyan eljárást, ami a fenti két műveletből $O(nk)$-t használva sorbarakja az $n = 2^k$ csomagot. A fenti két eszközön kívül mást nem tehetünk a csomagokkal, pl. nem rakhatjuk le őket a szalagról, nem mérhetjük meg egyesével a súlyukat, de azt pl. nyilvántarthatjuk, hogy melyik csomagokat mozgattuk eddig.

6. Építsen kupacot az órán tanult (lineáris idejű) kupacépítő algoritmussal az alábbi tömbből: $17, 12, 13, 8, 4, 2, 1$. Minden lényegi lépés után adja meg az aktuális állapotot és jelezze, hogy miért történt változás.

7. Egy bináris keresőfában 100-nál kisebb, különböző egész számokat tárolunk. Egy keresés során az alábbi számokat láttuk (ebben a sorrendben): $7, x, 8, 97, 20, 10$. Mik x lehetséges értékei?

8. Egy piros-fekete fában az $1, 2, \ldots, 10$ egész számokat tároljuk. Mely számok állhatnak a fa gyökerében?

Algoritmuselmélet vizsga
2012. május 24.

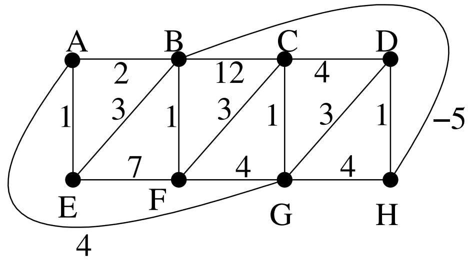
1. Mikor mondjuk az $f(n), g(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvényekről, hogy $f(n) = O(g(n))$? Igazolja, hogy ha $f(n) = O(g(n))$, akkor $g(n) = \Omega(f(n))$.

2. Írja le, hogy hogyan történik a beszúrás a nyitott címzésű hash-elésnél, ha kettős hash-elést használunk!

3. Hogyan zajlik a BESZÚR eljárás a kupacoknál? Mennyi az eljárás lépésszáma n elemet tartalmazó kupac esetén és miért? (Az indoklás során a kupac magasságára vonatkozó állítást is igazolja.)

4. Egy folyó mellett két város terül el egymással szemben, a városok úthálózata egy-egy adjacencia mátrixával adott irányított gráf, a két városban összesen n csomópont van. A városok vezetése gyalogoshidat tervez építeni a folyón át (jelenleg semmilyen híd sincs), szavazni lehet, hogy ki hol szeretné látni a hidat, ehhez adott a lehetséges hidak listája (két folyóparti csomópont között legfeljebb egy terv van). Úgy szeretnénk szavazni, hogy az egyik városban levő A csomópontbeli lakásunkból a másik városban fekvő B csomópontbeli egyetemünkre minél gyorsabban el tudjunk jutni gyalog. Ismerjük a két városon belül a csomópontok közti gyaloglási időinket és azt is, hogy a potenciális hidakon milyen gyorsan tudnánk átgyalogolni. Adjon algoritmust, ami $O(n^2)$ lépésben meghatározza, hogy melyik gyalogoshídra adjuk a szavazatunkat.

5. Milyen sorrendben veszi be az E pontból futtatott Prim algoritmus az éleket a minimális feszítőfába az alábbi gráfban?



6. Tegyük fel, hogy $coNP \subseteq P$. Következik-e ebből, hogy az alábbi eldöntési feladat NP-beli?

   Input: G irányítatlan gráf és egy k egész szám

   Kérdés: Igaz-e, hogy G nem színezhető k színnel?

7. Igazolja, hogy a következő döntési probléma P-ben van, vagy azt, hogy NP-teljes!

   Input: G irányítatlan gráf

   Kérdés: Igaz-e, hogy G-ben létezik legalább $\frac{v(G)}{2012}$ hosszú út?

   (Itt $v(G)$ a gráf csúcsainak számát jelöli.)

8. Külföldi ösztöndíjakat szeretnénk megpályázni, ezekhez ajánlólevelekre van szükségünk. Összesen n helyre adunk be pályázatot, minden pályázathoz két ajánlólevél szükséges. Ajánlólevelet m darab embertől tudunk kérni, de nem akarunk senkit sem túlságosan terhelni, ezért egy embertől legfeljebb egy ajánlólevelet akarunk kérni. (Az ajánlólevelek egyediek, egy levelet csak egy pályázatnál tudunk felhasználni.) Sajnos a pályázatok olyanok, hogy nem minden lehetséges ajánló személy jó minden helyre (azt tudjuk, hogy ki hova jó). Adjon algoritmust, ami $O((n+m)nm)$ lépésben javasol egy lehetséges megoldást!

Algoritmuselmélet vizsga
2012. május 31.

1. Írja le a ládarendezés algoritmusát! Mennyi az algoritmus lépésszáma, ha n rendezendő egész számunk van, melyek az $[1, m]$ tartományba esnek? A lépésszámot indokolja is meg!

2. Piros-fekete fában mit értünk egy csúcs fekete-magasságán? Mondja ki és bizonyítsa be a magasság és a fekete-magasság közt fennálló összefüggéseket!

3. Adja meg a MAXKLIKK és RÉSZGRÁFIZO problémák pontos definícióját és adjon meg egy MAXKLIKK $\prec$ RÉSZGRÁFIZO Karp-redukciót! (A Karp-redukció jóságát nem kell igazolni.)

4. Egy nagy nyári fesztiválon több helyszínen zajlanak a programok, összesen n esemény van. Előre eldöntjük, hogy mik érdekelnek minket és azt is eldöntjük, hogy amire elmegyünk, azon az elejétől a végéig ott leszünk. Tudjuk, hogy melyik program mikor kezdődik és végződik (tegyük fel, hogy csúszás nincs) és ismerjük azt is, hogy a helyszínek között mennyi idő alatt lehet áterni. Adjon $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust, ami a minket érdeklő programok közül kiválasztja a lehető legtöbbet, amin részt tudunk venni.

5. Egy 2-3 fában az alábbi kulcsokat tároljuk: $1, 5, 7, 8, 12, 13, 20, 21$, a levelek feletti szinten a csúcsoknak (balról jobbra haladva) $3, 3, 2$ levelük van.
(a) Rajzolja fel a 2-3 fát, adja meg a belső csúcsokban levő címkéket is!
(b) Szúrja be a fába a 6-ot, adja meg az így kapott fát (a belső csúcsokban levő címkéket is)!

6. Egy város úthálózatát egy adjacenciamátrixával adott irányítatlan, n csúcsú gráf írja le. A város útjai kivétel nélkül felújításra szorulnak, minden élre adott a megfelelő útszakasz felújítási költsége. Szerencsére a város annyi pénzt igényelhet útfelújításra, amennyit csak akar, de az összes tervezett útfelújítást egyszerre kell elvégezni és ha egy útszakaszon dolgoznak, akkor az az él nem használható. Szeretnénk a lehető legnagyobb költségű felújítást megtalálni azzal a feltétellel, hogy a városnak járhatónak kell maradnia eközben, azaz bármely két csúcs között kell, hogy legyen út felújítás alá nem eső élekből. Adjon algoritmust, ami $O(n^2)$ időben talál egy ilyen felújítást!

7. Jelölje Y az alábbi eldöntési feladatot:

   Input: G irányítatlan gráf és egy k egész szám

   Kérdés: Igaz-e, hogy G-ben nincsen k-fokú csúcs?

   Lehetséges-e, hogy $NP \neq P$ és $Y \prec RH$ egyszerre fennáll?

8. Igazolja, hogy a következő eldöntési probléma P-ben van, vagy azt, hogy NP-teljes!

   Input: G irányítatlan gráf és G egy kijelölt v csúcsa

   Kérdés: Igaz-e, hogy G kiszínezhető 4 színnel úgy, hogy v szomszédainak színei között a v csúcsától különböző összes többi 3 szín előfordul?

Algoritmuselmélet vizsga
2012. június 7.

1. Írja le a beszúrásos rendezés bináris keresést használó változatának algoritmusát! Hány összehasonlítást és hány mozgatást használ az algoritmus n rendezendő elem esetén? A lépésszámokat bizonyítsa is be! (A bináris keresés lépésszámát fel lehet használni bizonyítás nélkül.)

2. Ebben a feladatban a piros-kék algoritmussal kapcsolatos kérdésekre kell válaszolnia. Mit jelent az, hogy egy színezés takaros? Mondja ki a kék szabályt és mutassa be, hogy a Prim algoritmusban hogyan használjuk a kék szabályt!

3. Írja le a Bellman-Ford algoritmus lényegét adó rekurziós formulát és magyarázza el a benne szereplő összefüggést!

4. Egy város úthálózatát egy adjacencia mátrixával adott n csúcsú irányított gráf írja le. A gráf egyik csúcsában levő állatkertből öt elefánt szökött meg, ezeket szerencsére elfogták, a város öt különböző pontján tartják őket ketrecben. Szeretnénk egy elefánt-szállító autóval mindet begyűjteni, de az elefántok és az autó is nehéz, nem minden úton tudunk vele haladni. Minden élre ismert, hogy ott hány elefánttal tudunk közlekedni és ismert az élhez tartozó út hossza is. Adjon $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust, ami eldönti, hogy be tudjuk-e egy körben gyűjteni az összes elefántot (az állatkertből indulva és öt elefánttal oda visszaérkezve) és ha ez lehetséges, akkor javasol is egy lehetséges legrövidebb útvonalat. (Ha egy elefántot felvettünk, akkor azt csak az állatkertben engedjük ki.)

5. Javasoljon adatszerkezetet nagy létszámú szóbeli vizsgán felkészülés közben levő hallgatók nyilvántartására. A következő három műveletet van:
TÉTELT_KAP(X, T): bejegyzi, hogy az X Neptun-kódú hallgató T időpontban tételt kapott (egy időpontban egy ember kap csak tételt)
KÖVETKEZŐ: a legrégebben készülő hallgató Neptun-kódját adja meg
VIZSGÁZNI_MEGY(X): X kódú hallgatót kiveszi a felkészülő hallgatók közül (nem mindig a legrégebben készülő hallgató megy vizsgázni)
Ha n felkészülő hallgató van, akkor a KÖVETKEZŐ művelet lépésszáma legyen $O(1)$, a másik kettőé $O(\log n)$.

6. Hajtsa végre az A csúcsból a mélységi bejárást az alábbi éllistával megadott irányított gráfon, rajzolja fel a kapott feszítőfát és osztályozza a gráf éleit! A gráf éllistája **A**:D, E; **B**:A, G; **C**:D, G; **D**:B, F; **E**:C; **F**: B; **G**:D.

7. Jelölje Y az alábbi eldöntési feladatot:

   Input: G irányítatlan gráf

   Kérdés: Igaz-e, hogy G-ben nincsen 2012 elemű független csúcshalmaz?

   Igaz-e, hogy ha SAT$\prec$ Y fennál, akkor $P \neq NP$?

8. Igazolja, hogy a következő eldöntési probléma P-ben van, vagy azt, hogy NP-teljes!

   Input: $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n \mid s_i \in \mathbb{Q}^+ \text{ minden } 1 \leq i \leq n \text{ esetén}\}$

   Kérdés: Igaz-e, hogy létezik olyan diszjunkt $S = S_1 \cup S_2 \cup \{s_i\}$ felosztása a számoknak, hogy az S_1-beli számok összege megegyezik az S_2-beli számok összegével?

Algoritmuselmélet vizsga
2012. június 14.

1. Az alábbi feladatban a Dijkstra algoritmussal kapcsolatos kérdésekre kell válaszolnia. Hogyan (mikor) kerül egy elem a KÉSZ halmazba? Hogyan frissítjük a D tömböt, miután egy x csúcs a KÉSZ halmazba került?

2. Írja le, hogy hogyan kell elemet törölni egy 2-3 fából! Mennyi a művelet lépésszáma, ha a fában n elemet tárolunk? (A lépésszámot nem kell igazolni.)

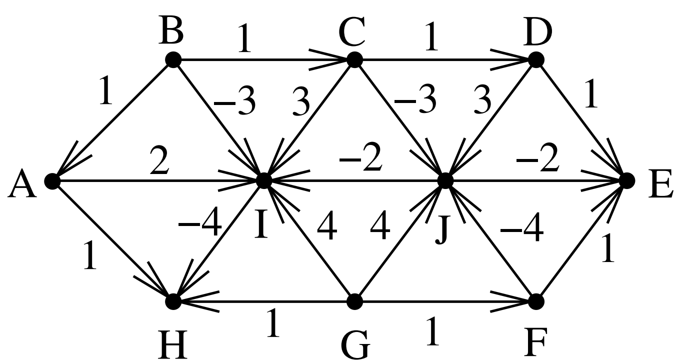
3. Adja meg a 3-SZÍN és a MAXFTLEN eldöntési problémák pontos definícióját és adjon meg egy 3-SZÍN$\prec$ MAXFTLEN Karp-redukciót! (A Karp-redukció helyességét nem kell igazolni.)

4. Két utazóügynök érkezik Csillagvárosba üzleti útra. A város úthálózatát egy $n+1$ csúcsú irányítatlan gráf írja le, ahol a központi v_0 ponthoz a $v_1, \ldots, v_n$ pontok egy-egy éllel csillagszerűen kapcsolódnak, a városban más út nincs. Minden (v_0, v_i) élre ismert, hogy hány (egész) percig tart végigutazni rajta (bármelyik irányban), illetve minden v_i $(1 \leq i \leq n)$ csúcshoz

tartozik egy h_i (egész) szám is, ekkora bevételt lehet elérni az adott csúcs meglátogatásával (a látogatás pillanatszerű).
Az ügynökök egymástól függetlenül haladnak, de útjukat mindketten a v_0 csúcsból indítják és ott is fejezik be, egy v_i ($1 \leq i \leq n$) csúcsba legfeljebb az egyikük látogathat el és legfeljebb egyszer. Az utazásra összesen fejenként T perc (T pozitív egész) áll rendelkezésükre. Javasoljon $O(nT^2)$ költségű algoritmust, amely meghatározza a kettejük által közösen elérhető maximális bevételt!

5. Éllistával adott egy irányítatlan élsúlyozott G gráf és benne egy kijelölt v csúcs. Javasoljon $O(e \log n)$ lépésszámú algoritmust, ami eldönti, hogy létezik-e olyan minimális súlyú feszítőfa G-ben, amelyben a v csúcs elsőfokú, és ha létezik, akkor meg is ad egy ilyet.

6. Az alábbi irányított G gráfnak
   (a) adja meg egy topologikus sorrendjét, majd
   (b) határozza meg minden csúcsra a B csúcsból oda vezető leghosszabb út hosszát!



7. Tegyük fel, hogy $NP \subseteq P$. Következik-e ebből, hogy az alábbi eldöntési feladat coNP-beli?

   Input: G irányítatlan, páros gráf

   Kérdés: Igaz-e, hogy G-ben létezik két éldiszjunkt maximális párosítás?

8. Igazolja, hogy a következő eldöntési probléma P-ben van, vagy azt, hogy NP-teljes!

   Input: G irányítatlan gráf

   Kérdés: Igaz-e, hogy G csúcsait két diszjunkt halmazra lehet osztani úgy, hogy a két halmazon belül összesen legfeljebb 2012 él fut?