Algoritmuselmélet zárthelyi
2011. március 28.

1. Egy problémára két algoritmusunk van.

   Az $\mathcal{A}$ algoritmus az $n \geq 2$ méretű problémából 10 lépéssel 2 db $n-1$ méretűt készít és ezeket oldja meg rekurzívan.

   A $\mathcal{B}$ az $n \geq 2$ méretű problémából 3 lépéssel 4 db $n-1$ méretűt készít és ezeket oldja meg rekurzívan. Az $n = 1$ esetben mindkét eljárás 1 lépést használ.

   Melyik algoritmus lesz nagy n értékekre a gyorsabb?

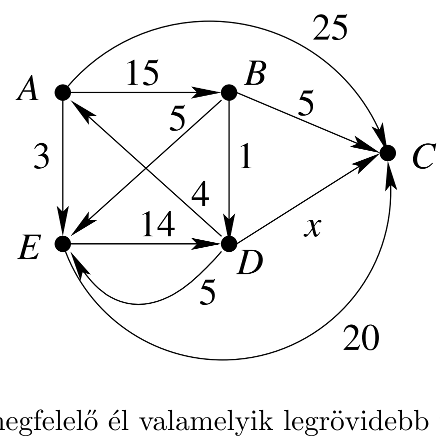
2. Van b darab borítékunk, az i-ediknek a hossza h_i, a magassága m_i. Az i-edik borítékba akkor tudjuk berakni a j-edik borítékot, ha $h_j < h_i$ és $m_j < m_i$ is teljesül (nem forgatjuk és nem is hajtogatjuk a borítékokat). Célunk, hogy minél hosszabb olyan láncot alakítsunk ki, hogy az i-edikben benne van a j-edik, abban a k-adik, stb.

   Legyen adott egy $L > 0$ egész és a h_i és m_i számok. Hogyan lehet $O(b^2)$ lépésben eldönteni, hogy kialakítható-e a borítékokból egy L hosszú lánc?

3. Az A tömb n különböző egész számot tartalmaz, $A[1] < A[2] < \cdots < A[n]$. A B tömb is n egész számot tartalmaz, és tudjuk, hogy $A[i] \leq B[i] \leq A[i] + 2$ minden $1 \leq i \leq n$ esetén. Hogyan lehet a B tömböt $O(n)$ összehasonlítással rendezni?

4. Egy játékban 4 számláló értékét lehet állítgatni. Mindegyik a $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ halmazból vesz fel értéket. Egy lépésben egyetlen számláló értékét tudjuk változtatni, az i értékből $i + 1 \pmod n$ vagy $i - 1 \pmod n$ lehet. Adott a kezdeti pozíció (A_1, A_2, A_3, A_4) és a cél (B_1, B_2, B_3, B_4), valamint tiltott pozícióknak egy listája. Adjon algoritmust, amely $O(n^4)$ időben meghatározza a minimális lépésszámot, amivel a kezdőpozícióból eljuthatunk a célba úgy, hogy közben egyetlen tiltott pozíciót sem érintünk.

5. Dijkstra-algoritmussal határozza meg az alábbi gráfon az A pontból a többi pontba vezető legrövidebb utak hosszát az x pozitív valós paraméter függvényében! Az algoritmus minden lépése után írja fel az úthosszakat tartalmazó tömb állapotát és a KÉSZ halmaz elemeit!



   Milyen x értékre szerepel a neki megfelelő él valamelyik legrövidebb útban?

6. Egy kupacban 7 elemet tárolunk. Hol helyezkedhet el a rendezés szerinti középső elem?

7. Egy bináris keresőfában az $1, 2, 3 \ldots, 2^k - 2$ elemeket tároljuk. Tudjuk, hogy a fa egy teljes bináris fa. Be akarjuk illeszteni a 0 számot is a fába úgy, hogy a végén megint olyan bináris keresőfát kapjunk, ami teljes bináris fa. Igazolja, hogy ehhez az összes elemet el kell mozgatni a fában!

8. Egy piros-fekete fában a 2010, 42, 100π, 1848, 3 elemeket tároljuk úgy, hogy a gyökérben levő elem a 42. Hogyan nézhet ki a fa? (Adja meg az összeset és indokolja meg, hogy más nincs!)

Algoritmuselmélet vizsgazárthelyi
2011. május 26.

1. Definiálja, hogy mit nevezünk kupacnak és írja le a KUPACÉPíTÉS eljárást! Mennyi az eljárás lépésszáma? (Indokolás nem kell.)

2. Írja le a gyorsrendezés algoritmusát! Milyen becslés ismert az algoritmus lépésszámára a legrosszabb, illetve átlagos esetben? (Indokolás nem kell.)

3. Írja le a Prim-algoritmust és indokolja meg, hogy ez piros-kék algoritmus!

---

4. Egy $\mathcal{A}$ algoritmus az $n > 4$ hosszú bemenetek esetén 1 lépésben 8 darab $n-4$ méretűt készít és ezeket oldja meg rekurzívan. Tudjuk még, hogy ha $n \leq 4$, akkor a lépésszám legfeljebb 5. Következik-e ebből, hogy az $\mathcal{A}$ lépésszáma

   (a) $O(2^n)$? (b) $O(n^{\log n})$?

5. Egy 11 méretű hash-táblába kettős hash-elést alkalmazva szúrja be a 10, 22, 32, 4, 15, 28, 17 számokat a megadott sorrendben! Legyen a hash-függvény és a másodlagos hash-függvény

$$h(x) = x \pmod{11}, \qquad h'(x) = x \pmod{10} + 1.$$

   A tábla állapotát minden beszúrás után adja meg!

6. P-beli vagy NP-teljes az az eldöntési probléma, melynek bemenete az $a_1, a_2, \ldots, a_n$, b, k pozitív egészek, és az a kérdés, hogy b előáll-e legfeljebb k darab különböző a_i összegeként?

7. Adott egy $G = (V, E)$ egyszerű, irányítatlan gráf, melynek az élei pozitív számokkal vannak súlyozva. Olyan maximális súlyú részgráfját keressük, mely közös csúcs nélküli körökből áll és G minden csúcsát tartalmazza. Fogalmazza meg a problémát egészértékű programozási feladatként! (A kapott EP feladatot nem kell megoldani!)

8. Egy konferencián egy időben két előadás folyhat, az egyik egy nagyobb, a másik egy kisebb teremben. Minden előadás egész órakor kezdődik, egy órát tart. Az előadások várható népszerűsége alapján már adott, hogy melyik előadás melyik terembe kerül, ezen nem változtathatunk. Témaütközések miatt bizonyos előadáspárokat a szervezők nem akarnak azonos időpontra tenni. Az megengedett, hogy egy időben csak egy előadás menjen, de a szervezők az egész konferencia hosszát (az előadásokkal töltött órák számát) a lehető legkisebbnek szeretnék. Adjon meg egy polinom idejű algoritmust amivel a szervezők előállíthatnak egy, a feltételeknek megfelelő beosztást!

Algoritmuselmélet vizsgazárthelyi
2011. június 2.

1. Írja le a legrövidebb utak keresésére szolgáló Dijkstra-algoritmust! Mi az alkalmazásának feltétele? (Az algoritmus helyességét nem kell bizonyítani.)

2. Definiálja az UNIÓ-HOLVAN adatszerkezetet, és írja le, hogyan lehet fákkal megvalósítani! Mennyi lesz ebben az esetben az egyes műveletek lépésszáma? (Indokolni nem kell.)

3. Definiálja a Karp-redukciót, és igazolja, hogy ez tranzitív!

---

4. Legyen $f(n) = f(\lfloor n/2 \rfloor) + 3n$, ha $n \geq 2$ és $f(1) = 1$. Mi az a legkisebb c, amelyre $f(n) = O(n^c)$?

5. Egy $n > 2$ elemet tároló piros-fekete fa kicsit megsérült. Minden adott róla, kivéve, hogy a gyökér baloldali fiának mi a színe és mi az ott tárolt elem. Adjon $O(\log n)$ lépésszámú algoritmust, amely meghatározza az összes lehetőséget, hogy mi lehetett a csúcs színe és az ott tárolt elem értéke!

6. P-beli vagy NP-teljes a PARTÍCIÓ problémának az a változata, amikor olyan megoldást keresünk, ahol
   (a) a partíció egyik felében csak páros számok vannak?
   (b) a partíció egyik felében csak páros, a másikban csak páratlan számok vannak?

7. Az $n > 3$ elemű T halmaz minden t eleméhez tartozik egy $\alpha(t)$ érték, ami egy egész szám. Egy részhalmaz értéke legyen a benne levő elemek értékeinek összege. Adott a T néhány részhalmaza $H_1, H_2, \ldots, H_k \subseteq T$. A T halmaznak egy olyan maximális értékű $S \subseteq T$ részhalmazát keressük, amelyik minden H_i halmazból legfeljebb 5 elemet tartalmaz.

   Fogalmazza meg a problémát egészértékű programozási feladatként! (A kapott EP feladatot nem kell megoldani!)

8. Éllistával adott egy $G = (V, E)$ irányított gráf és minden v *csúcsához* egy súly, $s(v) \in \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy a gráfban nincs irányított kör. Adjon $O(|V| + |E|)$ lépésszámú algoritmust, amely minden x csúcshoz meghatározza a legkisebb súlyú olyan csúcsot, amiből x irányított úton elérhető!

Algoritmuselmélet vizsgazárthelyi
2011. június 9.

1. Definiálja a 2-3 fát, sorolja fel a műveleteit (ezek algoritmusát nem kell leírni)! Ha n elemet tárolunk, akkor milyen messze lehetnek ezek az elemek a gyökértől? Válaszát indokolja is meg!

2. Írja le a legrövidebb utak keresésére szolgáló Floyd-algoritmust! Mennyi az algoritmus lépésszáma mátrixos megadás esetén? (Indokolni nem kell.)

3. Mit nevezünk hatékony tanúsítványnak és mikor mondjuk, hogy egy probléma NP-ben van? Adjon egy példát is egy NP-beli problémára (ne csak a nevét, pontos definíciót is írjon), és indokolja meg, hogy ez miért NP-beli!

---

4. Legyen $f(n) \leq 3f(n-1)$, ha $n \geq 2$ páros, és $f(n) \leq f(n-1)+8$ ha $n \geq 3$ páratlan, $f(1) = 5$. Következik-e ebből, hogy $f(n) = O(3^n)$, illetve, hogy $f(n) = \Omega(n+8)$?

5. Az alábbi hash-táblát az üresből kiindulva beszúrások sorozatával kaptuk. Határozza meg a beszúrások összes lehetséges sorrendjét, ha a hash-függvény a $h(x) = 3x \pmod{10}$ volt és a nyitott címzésű hash-elést lineáris próbával alkalmaztuk!

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
					5	19	3	33	23

6. Éllistával adott a $G = (V, E)$ irányított gráf. Valaki azt állította, hogy a gráfban bármely $u, v \in V$ csúcsra, $u \neq v$, teljesül, hogy legfeljebb 1 út mentén juthatunk el u-ból v-be. Adjon $O(|V| + |E|)$ lépésszámú algoritmust, amivel ellenőrizni lehet, hogy igaz-e az állítás!

7. Egy többnapos kirándulásnál a környék térképe egy irányítatlan gráffal adott. Célunk, hogy a gráf egyik csúcsában legyen a szállásunk, ahonnan minden nap egy gráfbeli utat járunk be (egy út mentén elmegyünk valameddig, és azután ugyanezen az útvonalon térünk vissza). Azt szeretnénk, hogy minden nap csupa új látnivalóhoz jussunk el, azaz a szálláson kívül ne legyen közös pontja a különböző napokon bejárt utaknak. Kérdés, hogy meg tudjuk-e választani a szálláshelyet úgy, hogy ily módon a gráf minden pontjában járjunk (a napok számára nincs korlát, addig maradunk, amig van újabb útvonal).

   Vagy adjon a feladatra polinom idejű algoritmust vagy mutassa meg, hogy az eldöntési probléma NP-teljes!

8. A hátizsákproblémának tekintsük azt a speciális esetét, amikor mind az n darab tárgy s_i súlyára és v_i értékére fennáll, hogy $s_i \leq v_i \leq 2s_i$ és azt is tudjuk, hogy minden tárgy súlya legfeljebb a súlykorlát 1/3-a. Adjon $O(n)$ lépésszámú algoritmust, amely ilyen feltételek mellett c-közelítő algoritmus valamilyen konstans c számra!

Algoritmuselmélet vizsgazárthelyi
2011. június 16.

1. Írja le a radix rendezés algoritmusát! Mikor alkalmazható és mennyi az algoritmus lépésszáma? (A lépésszámot nem kell indokolni.)

2. Definiálja a piros-fekete fát! (A műveletek leírása nem kell.) Írja le a magasság és a fekete magasság közötti összefüggést, és indokolja meg, miért teljesül!

3. Írja le a tanult módszert, ahogyan egy éllistájával megadott, már topologikusan rendezett súlyozott gráfban lineáris időben meg lehet határozni egy adott v csúcsból az összes többi csúcsba menő legrövidebb út hosszát!

---

4. Az alábbi függvényeket rendezze sorba oly módon, hogy ha f_i után közvetlenül f_j következik, akkor $f_i = O(f_j)$ teljesüljön!

$$f_1(n) = 6^n + 100n, \qquad f_2(n) = 42n^{5\log n} - 3n^2, \qquad f_3(n) = 2011n!/(\lfloor n/2 \rfloor!).$$

5. Van egy hátizsákunk, amelybe legfeljebb b összsúlyú dolgot rakhatunk. Egy raktárban p különböző polcon vannak elhelyezve tárgyak, minden polcon legfeljebb d darab. Az i-edik polc j-edik tárgyának súlya $s_{i,j}$, ára $a_{i,j}$. Adjon algoritmust, amely a b, $s_{i,j}$, $a_{i,j}$ pozitív egész számok ismeretében meghatározza, hogy maximum mennyi lehet a hátizsákba rakott tárgyak árainak összege, ha minden polcról legfeljebb 1 darab tárgyat választhatunk! Az algoritmus lépésszáma legyen $O(p\,b\,d)$.

6. Éllistával adott a G irányítatlan egyszerű, összefüggő gráf, melynek n csúcsa, e éle van és minden f éléhez egy $1 \leq s(f) \leq n$ egész súly tartozik. Olyan feszítőfát keresünk G-ben, amelyben az élek súlya nem nagyon tér el egymástól, azaz van hozzá egy $k \geq 0$ egész, amire a feszítőfa minden f élére $2^k \leq s(f) < 2^{k+1}$ teljesül. Adjon $O(e \log n)$ lépésszámú algoritmust, amely a feltételeknek megfelelő feszítőfák közül egy *minimális súlyút* talál (ha egyáltalán van ilyen feszítőfa)!

7. Az alábbi két eldöntési problémára teljesül-e, hogy $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$, illetve, hogy $\mathcal{B} \prec \mathcal{A}$?

   $\mathcal{A}$: bemenete egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráf, kérdés, igaz-e, hogy legalább 3 szín kell a csúcsainak a kiszínezéséhez.

   $\mathcal{B}$: bemenete egy $G_1 = (V_1, E_1)$ és egy $G_2 = (V_2, E_2)$ irányítatlan gráf, kérdés, igaz-e, hogy G_1-nek van G_2-vel izomorf részgráfja.

8. Egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráfban olyan legkisebb $A \subseteq V$ ponthalmazt keresünk, amelyre igaz, hogy minden $v \in V$ csúcsnak van legalább egy olyan $\{v, u\}$ éle, hogy $u \in A$.

   Fogalmazza meg a problémát az órán tanult alakú egészértékű programozási feladatként! (A kapott EP feladatot nem kell megoldani!)
