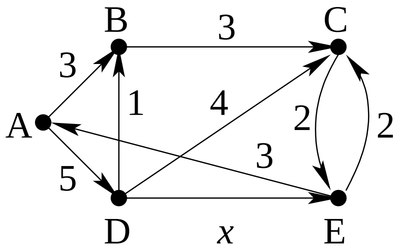
Algoritmuselmélet zárthelyi (BSc képzés)
2009. április 24.

1. Tekintsük az $f_1(n) = 2009\,n!$ és $f_2(n) = 100\,(n-1)!$ függvényeket. Igaz-e, hogy
   a) $f_1 = O(f_2)$ b) $f_2 = O(f_1)$ c) $f_1 = \Omega(f_2)$ d) $f_2 = \Omega(f_1)$?

2. Dijkstra-algoritmussal határozza meg az alábbi gráfban az A pontból az összes többi pontba menő legrövidebb utak hosszát az x pozitív valós paraméter függvényében. Minden lépésnél írja fel a távolságokat tartalmazó D tömb állapotát és a KÉSZ halmaz elemeit.



3. Egy bináris fa csúcsai 0 és 9 közötti egész számokkal vannak megcímkézve. Az inorder bejárás során a címkék sorrendje: 9, 3, 1, 0, 4, 2, 7, 6, 8, 5, a postorder bejárásnál pedig 9, 1, 4, 0, 3, x, 7, 5, y, 2. Mi lehet az x és mi az y?

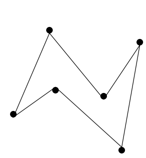
4. Egy piros-fekete fában jelölje x és y a gyökér két fiát. Tudjuk, hogy $fm(x) = fm(y)$, de az x csúcs két gyerekének különbözik a fekete magassága. Milyen színű lehet az y csúcs?

5. Egy 2-3 fa gyökerének három fia van, a benne szereplő két érték 40 és 50. Mennyi lehet a tárolt elemek minimális, illeve maximális száma, ha tudjuk, hogy csak pozitív egész számokat tárol a fa?

6. Egy kezdő autóvezető a városban való közlekedése során szeretne gyakorlatának megfelelő útvonalat választani. Az úthálózat egy irányítatlan gráfként van megadva, a csúcsok a kereszteződések, az élek az utak, a csúcsoknál adott, hogy nehéz-e számára az a kereszteződés. (Az hogy nehéz, a kereszteződés tulajdonsága, nem azon múlik, merről érkezik oda és merre akar rajta áthaladni.) Írjon le egy algoritmust, amivel meg lehet határozni, hogy az autós az egyik adott csúcsnál levő otthonából mely csúcsokba tud autóval úgy eljutni, hogy útja során két nehéz csúcs soha nem jön közvetlenül egymás után. Az algoritmus lépésszáma éllistás megadás esetén legyen $O(n + e)$, ahol n a csúcsok és e az élek száma.

7. Bankunk k féle valutával foglalkozik. Valaki megsúgta nekünk az elkövetkező n napra, hogy melyik nap mi lesz az átváltási arány az egyes valuták között, azaz adottak a $t(m, i, j)$ számok, amelyek azt mutatják, hogy az m-edik napon az i-edik valuta egy egységéért mennyit adnak a j-edik valutából ($1 \le m \le n$ és $1 \le i, j \le k$). Azt szeretnénk tudni, hogyan lesz az n-edik nap végére a lehető legtöbb forintunk az első nap meglevő 10000 forintunkból. Adjon algoritmust, ami ezt meghatározza, feltéve, hogy minden nap legfeljebb egy átváltást végezhetünk és ha átváltunk, akkor mindig a teljes meglevő összeget váltjuk át. Tegyük fel, hogy az átváltásnak nincs külön költsége. Az algoritmus lépésszáma legyen $O(nk^2)$.

8. Adottak a $p_0 = (0, 0)$, $p_1 = (x_1, y_1)$, $\ldots$, $p_n = (x_n, y_n)$, $p_{n+1} = (100, 0)$ pontok a síkban ($n \ge 1$) úgy, hogy $1 \le i \le n$ esetén x_i és y_i racionális számok, $0 < x_i < 100$, és semelyik három pont nem esik egy egyenesbe. Egyenes szakaszokkal akarjuk ezeket a pontokat valamilyen sorrendben összekötni úgy, hogy egy $n + 2$ csúcsú zárt töröttvonalat kapjunk, amiben a behúzott szakaszok nem metszik egymást (az ábra egy 6 csúcsú zárt töröttvonalat mutat). Adjon egy $O(n \log n)$ lépésszámú algoritmust annak meghatározására, melyik pontot melyikkel kössük össze!



Algoritmuselmélet vizsgazárthelyi (BSc képzés)
2009. május 28.

1. Írja le a radix rendezést! Milyen esetben alkalmazható? Mennyi az algoritmus lépésszáma? (Indokolni nem kell.)

2. Írja le a legrövidebb utak megatározására való Floyd-algoritmust! Mátrixos megadás esetén mennyi az algoritmus lépésszáma és miért?

3. Igazolja, hogy ha az $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ problémákra teljesül, hogy $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ és $\mathcal{B} \in \mathrm{P}$ akkor $\mathcal{A} \in \mathrm{P}$.

---

4. Egy algoritmus $T(n)$ lépésszámáról azt tudjuk, hogy $T(1) = 10$ és minden $n > 1$ esetben $T(n) \leq 2009n^2 + T(n-1)$. Következik-e ebből, hogy ez a lépésszám
   (a) $O(2^{\log^2 n})$?
   (b) $O(n^4)$?

5. Adott egy n csúcsú bináris keresőfa. Ennek minden v csúcsára meg akarjuk határozni, hogy a v gyökerű részfában hány darab v-nél kisebb elem van tárolva. Adjon algoritmust, ami ezt a feladatot $O(n)$ lépésben megoldja!

6. Éllistával adott egy $G = (V, E)$ egyszerű, irányítatlan, összefüggő gráf, melynek az élei súlyozottak. Tegyük fel, hogy az élsúlyok mind különbözőek. A gráf egy körének értéke legyen a körben szereplő *legnagyobb* élsúly. Olyan kört szeretnénk találni a G gráfban, aminek értéke minimális. Adjon algoritmust, mely $O(|V|^2 \log |V|)$ lépésben talál egy ilyen kört vagy jelzi, hogy nincs kör G-ben.

7. P-beli vagy NP-teljes az alábbi probléma? Adott egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráf és az a kérdés, hogy van-e olyan C kör a gráfban, melyhez minden $v \notin C$ csúcsból vezet él.

8. Egy csomagküldő szolgálatnál csupa egyforma dobozokba pakolják az elküldendő árut. Céljuk az, hogy a ládákban maradó üres helyet kitöltő anyagból minél kevesebbre legyen szükség. Igaz-e, hogy a Ládapakolásra megismert First Fit eljárás erre a problémára is egy 2-közelítő algoritmus?

Algoritmuselmélet vizsgazárthelyi (BSc képzés)
2009. június 4.

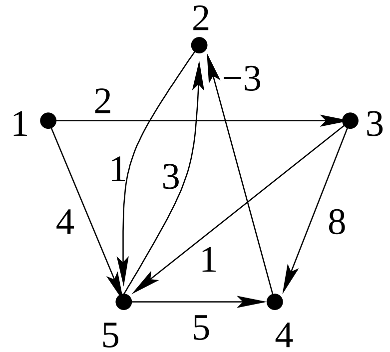
1. Sorolja fel a nyitott címzésű kvadratikus próbájú hashelés műveleteit és írja le az algoritmusukat!

2. Írja le a legrövidebb utak hosszának meghatározására szolgáló Dijkstra-algoritmust! Mi az alkalmazás feltétele? Mennyi a lépésszáma éllistás megadás és kupac alkalmazása esetén? (Indokolni nem kell.)

3. Mit jelent az NP ? Adjon egy példát egy NP-beli problémára, és indokolja is meg, miért tartozik oda.

---

4. Az alábbi gráfon a Floyd-algoritmust futtatjuk. Az algoritmus során (a 4. javítási menet végén) az F_4 táblázat tartalmazza az ismert úthosszakat.



$$F_4 = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 2 & 10 & 3 \\ \infty & 0 & \infty & \infty & 1 \\ \infty & 5 & 0 & 8 & 1 \\ \infty & -3 & \infty & 0 & -2 \\ \infty & 2 & \infty & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Hogyan változik a táblázat amikor minden csúcspárra újra elvégezzük a frissítést?

5. Mutassa meg, hogyan kell a 2-3 fa BESZÚR eljárását módosítani, ha a fa minden v csúcsában a szokásos dolgokon kívül azt is nyilvántartjuk, hogy hány levél van a v gyökerű részfában!

6. Egy téglalap alaprajzú irodát $k \times n$ egyforma kis négyzet alakú részre osztunk. Az építész berajzolta az összes lehetséges falat, ezzel egy $k \times n$ méretű négyzetrácsot kapott. A kis négyzeteket határoló falak egy részét ki akarjuk hagyni oly módon, hogy a bal alsó sarokban levő négyzetből indulva mindenhova el tudjunk jutni. Adott minden falra, hogy annak kihagyása mennyi költséggel jár. Adjon $O(k^2n^2)$ lépésszámú algoritmust, amivel meghatározhatjuk, hogy mely falakat hagyjuk ki ha a célunk a költség minimalizálása.

7. Legyen az $\mathcal{A}$ probléma a következő: Adott egy $G = (V, E)$ összefüggő irányítatlan gráf. Kérdés, hogy van-e olyan feszítőfája, amiben minden nem-levél csúcs fokszáma 3. A H-s-t-út pedig azt a problémát jelöli, amikor azt kell eldönteni, hogy adott gráfban két adott csúcs között van-e Hamilton-út.

   Igaz-e, hogy

   (a) $\mathcal{A} \prec$ H-s-t-út ?

   (b) H-s-t-út $\prec \mathcal{A}$?

8. Egy adott egyszerű, irányítatlan gráfban maximális méretű teljes részgráfot akarunk találni. Írja le ezt a problémát egy egész értékű programozási feladatként! (A kapott egész értékű programozási feladatot nem kell megoldani.)

Algoritmuselmélet vizsgazárthelyi (BSc képzés)
2009. június 11.

1. Írja le a mélységi bejárás algoritmusát az élek osztályozásával együtt! Mennyi az algoritmus lépésszáma mátrixos, illetve éllistás megadás esetén? (Indokolni nem kell.)

2. Definiálja az UNIÓ-HOLVAN adatszerkezetet. Mennyi az egyes műveletek lépésszáma tömbös, illetve fás (útösszenyomás nélküli) megvalósítás esetén? (Indokolni nem kell.)

3. Definiálja a Ládapakolás problémát, és bizonyítsa be, hogy a First Fit eljárás egy 2-közelítő algoritmus!

---

4. Jelölje $L(n)$ egy algoritmus lépésszámának maximumát az n csúcsú gráfokon. Tudjuk, hogy $L(1) = 3$ és

$$L(n) = \begin{cases} L(\frac{n}{2}) + 1 & \text{ha } n \text{ páros} \\ L(\frac{n-1}{2}) + 8 & \text{ha } n > 1 \text{ páratlan} \end{cases}$$

Következik-e ebből, hogy

(a) $L(n) = O(n)$?

(b) $L(n) = O(\log n)$?

5. Adott a számegyenesen n intervallum, $[a_1, b_1], \ldots, [a_n, b_n]$. Azt akarjuk tudni, hogy együtt milyen hosszú részt fednek le a számegyenesből (azaz, hogy mennyi az $\cup_{i=1}^{n}[a_i, b_i]$ összhossza). Adjon $O(n \log n)$ lépéses algoritmust ennek a hossznak a meghatározására!

6. A véges hosszú 0-1 sorozatok egy részét valamilyen szempontból jónak tekintjük, a többit rossznak. Van egy A algoritmusunk, mely adott n hosszú 0-1 sorozatról $O(\log(n!))$ lépésben megmondja, hogy a sorozat jó vagy rossz.

   Adjon olyan eljárást, mely A-t felhasználva, ha adott egy m hosszú 0-1 sorozat, $y = y_1 y_2 \cdots y_m$, akkor eldönti, hogy y előáll-e néhány jó sorozat egymás után fűzéséből. Az eljárás lépésszáma összesen legyen $O(m^4)$.

7. Egy autóval benzint szállítunk a környékre. Az úthálózatot egy $G = (V, E)$ egyszerű, irányítatlan gráf írja le. Tegyük fel, hogy az autónk mindegyik élen ugyanannyi, x liter benzint fogyaszt. A gráfban $s \in V$ a kiindulópontunk és $h \in V$ egy másik kijelölt csúcs. Minden más csúcs egy megrendelőt jelöl, a $v_i \in V$ csúcsba $\ell_i \in \mathbb{N}$ liter benzint kell szállítani. Az s csúcsban az autónk tankja üres, de kannákban van összesen L liter benzinünk. Az s-ből indulva úgy szeretnénk a $h \in V$ csúcsba hazaérni, hogy közben az L literből minél több csúcs megrendelését teljesítsük. Tegyük fel, hogy az autónkba és a megrendelések teljesítésekor is tudunk pontosan annyi benzint kitölteni, amennyit akarunk. Amikor egy csúcsot az utunk során először érintünk, akkor le kell adjuk az ott megrendelt mennyiségű benzint, a megrendelés teljesítése nélkül nem haladhatunk át egy csúcson sem.

   Fogalmazza át az optimalizálási feladatot döntési feladattá és mutassa meg, hogy ez NP-teljes!

8. Egy adott egyszerű, irányítatlan gráfban maximális méretű párosítást akarunk találni. Írja le ezt a problémát egy egész értékű programozási feladatként! (A kapott egész értékű programozási feladatot nem kell megoldani.)

Algoritmuselmélet vizsgazárthelyi (BSc képzés)
2009. június 17.

1. Írja le a Hátizsák problémára tanult dinamikus programozásos algoritmust!

   Igaz-e, hogy az algoritmus lépésszáma a bemenet hosszának polinomja? Miért?

2. Írja le Prim algoritmusát a minimális súlyú feszítőfa keresésére. Mennyi az algoritmus lépésszáma mátrixos megadás esetén? (Indoklás nem kell.)

3. Írja le a MAXFTL probléma NP-teljességének bizonyítását!

---

4. Igazolja, hogy nincs olyan összehasonlítás alapú rendező algoritmus, melynél minden bemenet esetén minden elem legfeljebb 2009 összehasonlításban szerepel!

5. Az MSc-re jelentkezőknek a felvételit alkotó 3 témakör mindegyikéből lesz egy írásbeli pontszámuk (P_1, P_2, P_3), és keletkezik egy felvételi pontszámuk is (FP). Tegyük fel, hogy a P_i-k 1 és 30 közötti egészek, míg az FP tetszőleges pozitív egész szám lehet. Adjon meg egy olyan adatszerkezetet, amivel a következő műveletek az adott időben végrehajthatóak (n a jelentkezők számát jelöli)!

   BESZÚR(P_1, P_2, P_3, FP): az adott pontszámok beillesztése – $O(\log n)$

   KERES(p): a pontosan p felvételi ponttal (FP=p) rendelkező jelentkezők számát határozza meg – $O(\log n)$.

   KORLÁT(i, q): az írásbelin az i-edik témakörből ($1 \leq i \leq 3$) legalább q pontot elért jelentkezők számát határozza meg – $O(1)$.

6. Egy csomagszállító autójában a kiszállításra váró csomagok két oszlopban vannak elhelyezve. Azért, hogy ne kelljen átpakolnia, úgy szállítja le ezeket, hogy mindig valamelyik oszlop tetején levő csomagot kézbesíti, és azt szeretné, hogy az így utolsónak maradó csomag is minél előbb célba érjen. (Az oszlopokban levő csomagok sorrendjén, és azon, hogy melyik csomag melyik oszlopban van nem változtat, csak mindig valamelyik oszlop tetejéről levesz egyet.)

   Legyen mátrixával adott egy n csúcsú, egyszerű, összefüggő, irányítatlan G gráf, ami az úthálózatot írja le. Az élekhez rendelt súlyok a megfelelő útszakaszok megtételéhez szükséges időt jelölik. Minden csomagot a gráf valamelyik csúcsába kell szállítani, minden csúcsba legfeljebb egy csomag kerül. Adjon $O(n^3)$ lépésszámú algoritmust, ami megmondja, hogy, a csomagok címzettjeit ismerve, a $t \in V$ telephelyről milyen sorrendben kell a szállításokat teljesíteni, hogy a munka minél előbb véget érjen.

7. Legyen az $\mathcal{A}$ probléma a következő: Az adott $G = (V, E)$ egyszerű irányítatlan gráfban van-e 100 pontú klikk. A $\mathcal{B}$ probléma pedig az X3C (pontos fedés hármasokkal). Igaz-e, hogy

   (a) $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$?

   (b) $\mathcal{B} \prec \mathcal{A}$?

8. A Ládapakolás problémának tekintsük azt a speciális esetét, amikor az n tárgy mindegyike vagy a vagy b méretű, ahol $0 < a < b < 1$ és $a + b = 1$. Adjon ennek megoldására $O(n)$ lépésszámú algoritmust!