Algoritmuselmélet zárthelyi (BSc képzés)
2007. április 27.

1. A valós számokból álló $a_1, \ldots, a_n$ sorozat olyan, hogy az $a_1^2, a_2^2, \ldots, a_n^2$ sorozat egy darabig nő, utána csökken. Adjon $O(n)$ összehasonlítást használó algoritmust, ami rendezi az $a_1, \ldots, a_n$ sorozatot.

2. Egy kezdetben üres bináris keresőfán hajtsa végre az alábbi műveleteket és minden lépés után rajzolja le a kapott fát!
BESZÚR(6), BESZÚR(3), BESZÚR(5), BESZÚR(15), BESZÚR(10), BESZÚR(20),
BESZÚR(12), BESZÚR(14), TÖRÖL(15), BESZÚR(4), TÖRÖL(3).

3. Egy piros-fekete fában lehetséges-e, hogy a piros-fekete tulajdonság megsértése nélkül
(a) néhány fekete csúcsot átváltoztathatunk pirosra?
(b) valamelyik (csak egy) fekete csúcsot átváltoztathatjuk pirosra?
(Mást nem változtatunk a fán.)

4. Ha adott n szám, akkor hívjuk közülük középső elemnek a rendezés szerinti $\lceil n/2 \rceil$-ediket.

   Kezdetben adottak az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ egész számok, amikről tudjuk, hogy az a_1 a középső elem, egyébként a számok rendezetlenek. Ezekből építsen fel egy adatszerkezetet, amiben két művelet van:
BESZÚR: egy új elemet illeszt az adatszerkezetbe,
KÖZÉPTÖR: az aktuális középső elemet törli.
Mindkét művelet megvalósítása $O(\log k)$ összehasonlítást használjon, amikor k tárolt elem van, az adatszerkezet kezdeti felépítése legyen $O(n)$ összehasonlítás.

5. A kezdetben üres $M = 9$ méretű hashtáblába a $h(x) = x \pmod 9$ hash-függvény segítségével az adott sorrendben rakja be a 4, 27, 18, 13, 9, 10, 30 elemeket
(a) lineáris próbával;
(b) kvadratikus próbával.
Mindkét esetben minden lépés után írja le a kapott tömböt és jelölje, hogy az aktuális elem hol okozott ütközést.

6. Tekintsük az olyan G irányított gráfokat, amelyekben ha eltekintünk az élek irányításától, akkor a kapott irányítatlan G' gráf összefüggő. A G gráf egy mélységi bejárásánál maximálisan hány olyan csúcs lehet, amelyre a mélységi és a befejezési szám megegyezik?

7. Az $n \times n$ méretű tábla minden mezőjére egy pozitív egész szám van írva, az i-edik sorának j-edik elemére $A[i, j]$, ahol $0 \leq i, j < n$. Feladat, hogy az első oszlopból eljussunk az utolsó oszlopba úgy, hogy egy lépésben mindig a következő oszlopba lépünk, és azon belül, ha az i-edik sorban voltunk, akkor a következő lépésben vagy az $(i-1) \pmod n$ vagy az i vagy az $(i+1) \pmod n$ számú sorba kerülhetünk. Adjon $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust, ami meghatározza, hogy az első oszlop melyik eleméből induljunk, ha azt akarjuk, hogy a bejárt mezőkön levő számok összege minimális legyen (az utolsó oszlop bármelyik mezője lehet az utolsó olyan mező, amire rálépünk).

8. Kutyasétáltatáskor egy parkban egy gazda egy rögzített, egyenes szakaszokból álló útvonalon halad, aminek töréspontjai $t_1, \ldots, t_n$, a bejáratot jelölje t_0, a kijáratot t_{n+1}. A kutyája szabadon szaladgál, de a t_i pontokban találkozik a gazdájával. A t_i és t_{i+1} pontokban való találkozás között a kutya szeretne egy fát is meglátogatni (minden $i = 0, 1, \ldots, n$ esetén legfeljebb egyet-egyet). Legyenek adottak az $s(t_i, t_{i+1})$ távolságok $(0 \leq i \leq n)$, valamint minden fának az összes t_i ponttól vett távolsága. Tegyük fel, hogy két találkozás között a kutya legfeljebb kétszer akkora távolságot tud megtenni, mint a gazda. Adjon algoritmust, ami segít a kutyának eldönteni, hogy mikor melyik fát látogassa meg ha a kutya célja, hogy minél több fánál járjon. Az algoritmus lépésszáma legyen $O(n^2 f + n f^2)$, ahol f a parkban levő fák számát jelöli.

Algoritmuselmélet vizsgazárthelyi (BSc képzés)
2007. május 29.

1. Írja le a ládarendezés és a radixrendezés algoritmusát (az algoritmusok helyességét nem kell bizonyítani). Mennyi ezeknek a rendezéseknek a lépésszáma és miért?

2. Írja le a minimális feszítőfa keresésére szolgáló Prim-algoritmust. Mennyi a lépésszáma, ha éllistát és kupacot használunk az algoritmusban? (Az algoritmus helyességét és a lépésszámot nem kell indokolni.)

3. Ismertesse a ládapakolás feladatot és írja le az erre vonatkozó First Fit eljárást. Ez milyen megoldást talál az optimálishoz képest? Válaszát indokolja is!

---

4. Jelölje egy algoritmus maximális lépésszámát az n hosszú bemeneteken $L(n)$. Tudjuk, hogy $L(n) \leq L(n-1) + n/2$ teljesül, ha $n > 3$ és tudjuk, hogy $L(3) = 3$. Következik-e ebből, hogy az algoritmus lépésszáma $O(n^2)$?

5. Írjon le egy olyan adatszerkezetet, amivel egész számok véges sok részhalmazát tárolhatjuk, ha minden tárolandó T_i halmaznak véges sok eleme van.
   Három műveletet definiálunk, a BESZÚR lépésszáma legyen $O(|T_i|)$, a másik két műveleté pedig $O(|T_i| + |T_j|)$.

   BESZÚR(i,x): a T_i halmazhoz hozzáveszi az x egész számot
   METSZETMÉRET(i,j): megadja a két halmaz metszetének $|T_i \cap T_j|$ elemszámát
   UNIÓMÉRET(i,j): megadja a két halmaz uniójának $|T_i \cup T_j|$ elemszámát.

6. A $G = (V, E)$ irányított gráfban az élek egy része zöld, a többi pedig kék. Ketten játszanak, a zöld játékos a zöld élek mentén bárhova mozoghat ahova tud, a kék játékos pedig a kék élek mentén (nem kell felváltva lépniük, de mindenki csak a saját színű éleket használhatja). A zöld játékos a $z \in V$ pontból, a kék a $k \in V$ pontból indul. Azt akarjuk meghatározni, hogy a szabályok betartásával milyen közel tudnak egymáshoz kerülni. (Ha lehetnek ugyanazon a ponton, akkor ez az érték 0). A G gráf élei pozitív számokkal súlyozottak, két pont, x és y, távolsága az x-ből y-ba illetve az y-ból x-be vivő legkisebb összsúlyú utak közül a kisebbik súlya. A gráf a mátrixával adott, amiben minden élnek adott a színe is. Adjon algoritmust, ami n pontú gráf esetén $O(n^3)$ lépésben megoldja a feladatot.

7. A G irányítatlan gráf minden x pontjához tartozik egy $s(x)$ súly. Célunk, hogy olyan feszítőfát találjunk a gráfban, amiben a levelekhez tartozó súlyok összege minimális. Fogalmazza meg a feladathoz tartozó nyelvet és vagy lássa be róla, hogy P-ben van vagy azt, hogy NP-teljes.

8. Legyen $w = w_1 w_2 \cdots w_n$ egy n betűből álló szó. Hívjuk részszónak w egy tetszőleges $w_i w_{i+1} \cdots w_{i+k}$ darabját ($1 \leq i \leq n-1$, $1 \leq k \leq n-i$). Adjon algoritmust, ami $O(n)$ lépésben meghatározza az összes a-val kezdődő és b-re végződő részszó számát.

Algoritmuselmélet vizsgazárthelyi (BSc képzés)
2007. június 5.

1. Írja le a legrövidebb utak keresésére szolgáló Dijkstra-algoritmust. Mi az algoritmus alkalmazásának feltétele? (Az algoritmus helyességét nem kell bizonyítani.) Mennyi az algoritmus lépésszáma, ha a gráf a mátrixával van megadva és miért?

2. Definiálja az UNIÓ-HOLVAN adatszerkezetet. Mennyi az egyes műveletek lépésszáma tömbös, illetve fás (útösszenyomás nélküli) megvalósítás esetén? (Indoklás nem szükséges.)

3. Definiálja a P és az NP nyelvosztályt; mi az egymáshoz való viszonyuk? Válaszát indokolja is meg.

---

4. Jelölje egy algoritmus maximális lépésszámát az n hosszú bemeneteken $L(n)$. Azt tudjuk, hogy minden $n = 2k > 4$ páros számra $L(2k) \leq L(2k-2) + 1$ teljesül, és hogy $L(4) = 10$. Következik-e ebből, hogy az algoritmus lépésszáma $O(n)$?

5. Adott egy n csúcsú és egy k csúcsú piros-fekete fa. A két fában tárolt összes elemből $O(n + k)$ lépésben készítsen egy rendezett tömböt.

6. Útépítéskor a környéken sok helyen felszedték a járdát. Az építők 1-től n-ig megszámozták a fontos pontokat (kapualj, útkereszteződés, stb.). A környék állapotát két $n \times n$ táblázat írja le. A J táblázatban $J[i, j] = 1$, ha az i és j pontok az utcán szomszédosak és megmaradt az ezeket összekötő részen a járda, egyébként az érték 0. A P táblázat az ideiglenesen elhelyezhető pallókat írja le: ha az i és j pontok összektöthetőek egy pallóval, akkor $P[i, j]$ ennek a pallónak a költsége. Amennyiben a két pont nem köthető össze egy pallóval, akkor a táblázatban $*$ szerepel. (Minden palló pontosan két pontot érint.) Szeretnénk biztosítani, hogy mindenhonnan mindenhova el tudjunk jutni (hol járdán hol pallón haladva). Az építők célja, hogy úgy válasszák meg a pallók helyét, hogy minél kevesebb pallót kelljen használniuk, és ezen belül a pallók értékeinek összege minimális legyen. Írjon le egy algoritmust, ami $O(n^2)$ lépésben javasol egy ilyen elhelyezést. (Egy pontra tetszőlegesen sok palló illeszkedhet, és a gyalogosok az egy pontra illeszkedő pallók bármelyikéről bármelyikére át tudnak lépni.)

7. Mutassa meg, hogy az alábbi nyelv P-ben van, vagy azt, hogy NP-teljes:
$$L = \{(F_1, \ldots, F_n; r) \quad : \quad F_i \subseteq A, |F_i| = 3, \text{ az } F_i \text{ halmazok között van } r \text{ páronként diszjunkt}\}$$

8. Egy téglalap alakú telken néhány fa áll. Térképünkön a telket egy $n \times k$ négyzetrács ábrázolja, és azt látjuk, hogy fák csak rácspontokban vannak. Egy olyan, a telek oldalaival párhuzamos oldalú téglalap alakú házhelyet szeretnénk kijelölni, aminek csúcsai rácspontok. Célunk, hogy a kijelölt terület belsejében ne legyen fa (a határán már lehet) és a kijelölt téglalap kisebbik oldalának hossza a lehető legnagyobb legyen. Adjon $O(nk)$ lépésszámú algoritmust egy ilyen házhely meghatározására, ha egy listában adottak a fák helyzetét leíró rácspontok koordinátái.

Algoritmuselmélet vizsgazárthelyi (BSc képzés)
2007. június 12.

1. Definiálja a piros-fekete fákat. Mi a kapcsolat egy csúcs magassága és fekete magassága között? Állítását bizonyítsa is be!

2. Írja le a mélységi bejárás algoritmusát. (A pontok kétféle számozása és az élek osztályozása nem kell.) Mennyi az algoritmus lépésszáma mátrixos, illetve éllistás megadás esetén és miért?

3. Definiálja a Karp-redukciót és mutasson rá egy példát. A példa helyességét indokolja is meg.

---

4. Egy $\mathcal{A}$ algoritmusról azt tudjuk, hogy az n hosszú bemeneteken a lépésszáma $O(n \log n)$. Lehetséges-e, hogy
(a) van olyan x bemenet, amin a lépésszáma $|x|^3$?
(b) minden x bemeneten legfeljebb $2007|x|$ lépést használ?
(Szokás szerint $|x|$ az x szó hosszát jelöli.)

5. Egy számítógéphálózatban n számítógép van. Minden olyan eseményt, hogy az i-edik gép üzenetet küld a j-ediknek (i, j, t) formában feljegyezünk, ahol a t egész szám az üzenet küldésének időpontját jelöli. Ugyanabban a t időpontban egy gép több gépnek is küldhet üzenetet. Ha a t időpontban az i-edik gép vírusos volt, akkor egy (i, j, t) üzenet hatására a j-edik gép megfertőződhet, ami azt jelenti, hogy a $t + 1$ időponttól kezdve már a j-edik gép is vírusos lehet. Legyen adott az (i, j, t) hármasoknak egy m hosszú listája, valamint x, y és $t_0 < t_1$ egész számok. Azt kell eldöntenünk, hogy ha az x-edik gép a t_0 időpontban vírusos volt, akkor lehet-e emiatt az y-adik gép a t_1 időpontban vírusos. Adjon algoritmust, ami ezt a kérdést $O((t_1 - t_0)n + m)$ lépés után megválaszolja.

6. Igazolja, hogy ha a 3SZÍN nyelv benne van co NP-ben, akkor NP=co NP.

7. Tudjuk, hogy a síkgráfokból álló nyelv P-ben van. Legyen a SÍK-MAXKLIKK nyelv a következő:

$$\{(G, k) \mid G \text{ egy síkgráf, amiben van } k \text{ pontú klikk } \}$$

Mutassa meg, hogy ez a nyelv NP-teljes, vagy mutassa meg, hogy a nyelv P-ben van.

8. Egy n és egy m karakterből álló szövegben meg akarjuk találni a legnagyobb azonos darabot, azaz ha az egyik szöveg $a_1 a_2 \cdots a_n$ és a másik $b_1 b_2 \cdots b_m$, akkor olyan
$1 \le i \le n$ és $1 \le j \le m$ indexeket keresünk, hogy

$$a_{i+1} = b_{j+1}, a_{i+2} = b_{j+2}, \ldots, a_{i+t} = b_{j+t}$$

teljesüljön a lehető legnagyobb t számra. Adjon erre a feladatra $O(mn)$ lépést használó algoritmust.

Algoritmuselmélet vizsgazárthelyi (BSc képzés)
2007. június 19.

1. Definiálja a 2-3 fát, sorolja fel a műveleteit (az algoritmusokat nem kell leírni). Ha n elemet tárolunk egy 2-3 fában, akkor mennyi lehet a fa minimális, illetve maximális szintszáma? Válaszát indokolja is meg!

2. Írj le az összes pontpárra a legrövidebb út hosszát meghatározó Floyd-algoritmust. Mennyi az algoritmus lépésszáma? (Indokolni nem kell.)

3. Fogalmazza meg a hátizsák problémát, írja le a megoldására való dinamikus programozást használó algoritmust és indokolja az algoritmus helyességét. Mennyi az algoritmus lépésszáma?

---

4. Az alábbi függvényeket rendezze olyan sorozatba, hogy ha f_i után közvetlenül f_j következik a sorban, akkor $f_i(n) = O(f_j(n))$ teljesüljön!

$$f_1(n) = 2^{100n} - 2^{50n} \qquad f_2(n) = 2007n^3 \qquad f_3(n) = 3^{3n}.$$

5. Adott a síkon n pont, melyek koordinátái $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n)$. Olyan
$P = (x, y)$ pontot keresünk a síkon, amire az alábbi összeg minimális.

$$\sum_{i=1}^{n} (|a_i - x| + |b_i - y|)$$

Adjon algoritmust, ami $O(n \log n)$ lépésben meghatároz egy ilyen P pontot.

6. Jelölje L_1 az irányítatlan összefüggő gráfokból álló nyelvet és L_2 a Hamilton-kört tartalmazó gráfokból álló nyelvet. Lehetséges-e, hogy $L_1 \prec L_2$, illetve hogy
$L_2 \prec L_1$? Válaszát indokolja is meg!

7. Egy hivatal új épületbe fog költözni. Az épület minden emeletén ugyanakkora terület használható fel irodák kialakítására. Minden részleg megmondta, hogy összesen mekkora irodaterületre tart igényt. Azt akarjuk eldönteni, hogy meg lehet-e oldani a költözést úgy, hogy egyetlen részleg se legyen kettévágva, azaz egy részleg teljes egészében egy emeleten legyen (de egy emeletre kerülhet több részleg is). Igazolja, hogy a problémához kapcsolódó nyelv P-ben van, vagy azt, hogy a nyelv NP-teljes.

8. Egy előre rögzített útvonalon úgy indulunk el, hogy az autó L literes tankja tele van. Úticélunkhoz úgy akarunk elérni, hogy legalább egy fél tanknyi benzin maradjon az autóban. Tudjuk, hogy az utunkba eső n benzinkút közül melyikben mennyibe kerül a benzin, továbbá, hogy két szomszédos benzinkút között, valamint a kiindulóponttól az első benzinkútig, illetve az utolsó benzinkúttól a célunkig mennyi benzint fogyaszt az autó. Az egyszerűség kedvéért ha megállunk egy benzinkútnál, akkor mindig tele tankolunk. Adjon algoritmust, ami $O(Ln^2)$ lépésben megmondja, hogy hol álljunk meg tankolni ha azt akarjuk, hogy utunk során a benzinköltség minimális legyen.