Algoritmusok elmélete zárthelyi (5 éves képzés)
2007. április 27.

1. Egy kezdetben üres bináris keresőfán hajtsa végre az alábbi műveleteket és minden lépés után rajzolja le a kapott fát!
BESZÚR(6), BESZÚR(3), BESZÚR(5), BESZÚR(15), BESZÚR(10), BESZÚR(20),
BESZÚR(12), BESZÚR(14), TÖRÖL(15), BESZÚR(4), TÖRÖL(3).

2. Egy piros-fekete fában lehetséges-e, hogy a piros-fekete tulajdonság megsértése nélkül
(a) néhány fekete csúcsot átváltoztathatunk pirosra?
(b) valamelyik (csak egy) fekete csúcsot átváltoztathatjuk pirosra?
(Mást nem változtatunk a fán.)

3. Ha adott n szám, akkor hívjuk közülük középső elemnek a rendezés szerinti $\lceil n/2 \rceil$-ediket.

   Kezdetben adottak az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ egész számok, amikről tudjuk, hogy az a_1 a középső elem, egyébként a számok rendezetlenek. Ezekből építsen fel egy adatszerkezetet, amiben két művelet van:
BESZÚR: egy új elemet illeszt az adatszerkezetbe,
KÖZÉPTÖR: az aktuális középső elemet törli.
Mindkét művelet megvalósítása $O(\log k)$ összehasonlítást használjon, amikor k tárolt elem van, az adatszerkezet kezdeti felépítése legyen $O(n)$ összehasonlítás.

4. A kezdetben üres $M = 9$ méretű hashtáblába a $h(x) = x \pmod 9$ hash-függvény segítségével az adott sorrendben rakja be a 4, 27, 18, 13, 9, 10, 30 elemeket
(a) lineáris próbával;
(b) kvadratikus próbával.
Mindkét esetben minden lépés után írja le a kapott tömböt és jelölje, hogy az aktuális elem hol okozott ütközést.

5. Tekintsük az olyan G irányított gráfokat, amelyekben ha eltekintünk az élek irányításától, akkor a kapott irányítatlan G' gráf összefüggő. A G gráf egy mélységi bejárásánál maximálisan hány olyan csúcs lehet, amelyre a mélységi és a befejezési szám megegyezik?

6. Az $n \times n$ méretű tábla minden mezőjére egy pozitív egész szám van írva, az i-edik sorának j-edik elemére $A[i, j]$, ahol $0 \le i, j < n$. Feladat, hogy az első oszlopból eljussunk az utolsó oszlopba úgy, hogy egy lépésben mindig a következő oszlopba lépünk, és azon belül, ha az i-edik sorban voltunk, akkor a következő lépésben vagy az $(i-1) \pmod n$ vagy az i vagy az $(i+1) \pmod n$ számú sorba kerülhetünk. Adjon $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust, ami meghatározza, hogy az első oszlop melyik eleméből induljunk, ha azt akarjuk, hogy a bejárt mezőkön levő számok összege minimális legyen (az utolsó oszlop bármelyik mezője lehet az utolsó olyan mező, amire rálépünk).

7. Legyen $L = \{w\#k : \exists M_w$ Turing-gép és van olyan k hosszú szó, amit M_w nem fogad el$\}$. Igazolja, hogy $L \in \mathrm{co\,RE}$.

8. Legyen $L = \{((s_1, t_1), \ldots, (s_n, t_n); k) : s_i, t_i \in \{0,1\}^*$ az (s_i, t_i) párokhoz tartozó Post megfeleltetési problémának van legfeljebb k darabból álló megoldása $\}$. Mutassa meg, hogy az L nyelv rekurzív.

Algoritmusok Elmélete vizsgazárthelyi (5 éves képzés)
2007. május 22.

1. Ismertesse a (bináris) kupac adatszerkezetet, sorolja fel a műveleteit és írja le részletesen a BESZÚR eljárás algoritmusát. Mennyi a BESZÚR lépésszáma és miért?

2. Írja le a legrövidebb utak keresésére szolgáló Bellman-Ford- algoritmust. Mi az algoritmus alkalmazásának feltétele? Mátrixos megadás esetén mennyi az algoritmus lépésszáma? (Az algoritmus helyességét és a lépésszámot nem kell bizonyítani.)

3. Definiálja a Karp-redukciót és mutasson rá egy példát. (A példa helyességét indokolja is meg.)

---

4. Az alábbi függvényeket rendezze olyan sorozatba, hogy ha f_i után közvetlenül f_j következik a sorban, akkor $f_i(n) = O(f_j(n))$ teljesüljön!

$$f_1(n) = \frac{1}{100} n^2 \log n, \qquad f_2(n) = 10^{10} (\log n)^3 - 100 \log n \qquad f_3(n) = 8^{\log n}.$$

   (A válasz helyességét bizonyítani is kell!)

5. A G összefüggő irányítatlan gráfnak n csúcsa és $n+1$ éle van. A gráf élei súlyozottak. Adjon $O(n)$ lépéses algoritmust, ami az éllistával adott G-ben talál egy minimális súlyú feszítőfát.

6. A *Bizonytalan Turing-gép* egy olyan nemdeterminisztikus Turing-gép, ami minden bemeneten megáll, és eredményül vagy azt adja, hogy IGEN vagy azt, hogy NEM, vagy azt, hogy TALÁN. Ugyanarra a bemenetre a nemdeterminisztikus választásoktól függően különböző számítási ágakon különböző eredményt kaphatunk. Egy ilyen gépről azt mondjuk, hogy *elfogadja* az L nyelvet, ha
(1) minden $w \in L$ szóra az eredmény minden ágon csak IGEN vagy TALÁN lehet, és van olyan számítási ág, ahol az eredmény IGEN,
(2) minden $w \notin L$ szóra az eredmény minden ágon csak NEM és TALÁN lehet, és van olyan számítási ág, ahol az eredmény NEM.

   Igazolja, hogy ha az L nyelv felismerhető egy polinom időkorlátos Bizonytalan Turing-géppel, akkor $L \in \mathrm{NP} \cap \mathrm{co\,NP}$.

7. Legyen L egy olyan nyelv, amelyre $L \in \mathrm{co\,SPACE}(\log n)$. Igazolja, hogy ekkor $L \in P$.

8. Legyenek adottak az $a_1, a_2, \cdots, a_n$ nem feltétlenül különböző pozitív egész számok, és még egy k pozitív egész szám. Adjon algoritmust, ami $O(nk)$ lépésben meghatározza, hogy a k szám hányféleképpen állítható elő az a_i számok közül néhány összegeként. (Két előállítás különböző, ha a megfelelő indexek halmaza különbözik.)

Algoritmusok elmélete vizsgazárthelyi (5 éves képzés)
2007. június 5.

1. Írja le a legrövidebb utak keresésére szolgáló Dijkstra-algoritmust. Mi az algoritmus alkalmazásának feltétele? (Az algoritmus helyességét nem kell bizonyítani.) Mennyi az algoritmus lépésszáma, ha a gráf a mátrixával van megadva és miért?

2. Definiálja az UNIÓ-HOLVAN adatszerkezetet. Mennyi az egyes műveletek lépésszáma tömbös, illetve fás (útösszenyomás nélküli) megvalósítás esetén? (Indoklás nem szükséges.)

3. Definiálja az R és RE nyelvosztályokat. Adjon meg egy olyan nyelvet, ami egyikbe sem tartozik és bizonyítsa is ezt be.

---

4. Legyen Σ egy véges abc és $f : \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$ egy kölcsönösen egyértelmű rekurzív függvény. Következik-e ebből, hogy f inverze is rekurzív függvény?

5. Adott egy n csúcsú és egy k csúcsú piros-fekete fa. A két fában tárolt összes elemből $O(n+k)$ lépésben készítsen egy rendezett tömböt.

6. Útépítéskor a környéken sok helyen felszedték a járdát. Az építők 1-től n-ig megszámozták a fontos pontokat (kapualj, útkereszteződés, stb.). A környék állapotát két $n \times n$ táblázat írja le. A J táblázatban $J[i,j] = 1$, ha az i és j pontok az utcán szomszédosak és megmaradt az ezeket összekötő részen a járda, egyébként az érték 0. A P táblázat az ideiglenesen elhelyezhető pallókat írja le: ha az i és j pontok összektöthetőek egy pallóval, akkor $P[i,j]$ ennek a pallónak a költsége. Amennyiben a két pont nem köthető össze egy pallóval, akkor a táblázatban $*$ szerepel. (Minden palló pontosan két pontot érint.) Szeretnénk biztosítani, hogy mindenhonnan mindenhova el tudjunk jutni (hol járdán hol pallón haladva). Az építők célja, hogy úgy válasszák meg a pallók helyét, hogy minél kevesebb pallót kelljen használniuk, és ezen belül a pallók értékeinek összege minimális legyen. Írjon le egy algoritmust, ami $O(n^2)$ lépésben javasol egy ilyen elhelyezést. (Egy pontra tetszőlegesen sok palló illeszkedhet, és a gyalogosok az egy pontra illeszkedő pallók bármelyikéről bármelyikére át tudnak lépni.)

7. Mutassa meg, hogy az alábbi nyelv P-ben van, vagy azt, hogy NP-teljes:
$$L = \{(F_1, \ldots, F_n; r) \quad : \quad F_i \subseteq A, |F_i| = 3, \text{ az } F_i \text{ halmazok között van } r \text{ páronként diszjunkt}\}$$

8. Egy téglalap alakú telken néhány fa áll. Térképünkön a telket egy $n \times k$ négyzetrács ábrázolja, és azt látjuk, hogy fák csak rácspontokban vannak. Egy olyan, a telek oldalaival párhuzamos oldalú téglalap alakú házhelyet szeretnénk kijelölni, aminek csúcsai rácspontok. Célunk, hogy a kijelölt terület belsejében ne legyen fa (a határán már lehet) és a kijelölt téglalap kisebbik oldalának hossza a lehető legnagyobb legyen. Adjon $O(nk)$ lépésszámú algoritmust egy ilyen házhely meghatározására, ha egy listában adottak a fák helyzetét leíró rácspontok koordinátái.

Algoritmuselmélet vizsgazárthelyi (5 éves képzés)
2007. június 12.

1. Definiálja a piros-fekete fákat. Mi a kapcsolat egy csúcs magassága és fekete magassága között? Állítását bizonyítsa is be!

2. Írja le a mélységi bejárás algoritmusát. (A pontok kétféle számozása és az élek osztályozása nem kell.) Mennyi az algoritmus lépésszáma mátrixos, illetve éllistás megadás esetén és miért?

3. (a) Definiálja az univerzális és a megállási nyelvet.
(b) Mi a viszonyuk az RE osztályhoz? (A választ nem kell indokolni.)
(c) Az univerzális nyelv benne van-e az R osztályban? Válaszát indokolja is!

---

4. Egy $\mathcal{A}$ algoritmusról azt tudjuk, hogy az n hosszú bemeneteken a lépésszáma $O(n \log n)$. Lehetséges-e, hogy
(a) van olyan x bemenet, amin a lépésszáma $|x|^3$?
(b) minden x bemeneten legfeljebb $2007|x|$ lépést használ?
(Szokás szerint $|x|$ az x szó hosszát jelöli.)

5. Legyen $L = \{0^t 1^{t^2} \ : \ t = 1, 2, \ldots\}$. Mutassa meg, hogy van olyan 2 szalagos M Turing-gép, ami az L nyelvet ismeri fel és amire $T_M(n) = O(n)$.

6. Egy számítógéphálózatban n számítógép van. Minden olyan eseményt, hogy az i-edik gép üzenetet küld a j-ediknek (i, j, t) formában feljegyezünk, ahol a t egész szám az üzenet küldésének időpontját jelöli. Ugyanabban a t időpontban egy gép több gépnek is küldhet üzenetet. Ha a t időpontban az i-edik gép vírusos volt, akkor egy (i, j, t) üzenet hatására a j-edik gép megfertőződhet, ami azt jelenti, hogy a $t + 1$ időponttól kezdve már a j-edik gép is vírusos lehet. Legyen adott az (i, j, t) hármasoknak egy m hosszú listája, valamint x, y és $t_0 < t_1$ egész számok. Azt kell eldöntenünk, hogy ha az x-edik gép a t_0 időpontban vírusos volt, akkor lehet-e emiatt az y-adik gép a t_1 időpontban vírusos. Adjon algoritmust, ami ezt a kérdést $O((t_1 - t_0)n + m)$ lépés után megválaszolja.

7. Igazolja, hogy ha a 3SZÍN nyelv benne van co NP-ben, akkor NP=co NP.

8. Egy n és egy m karakterből álló szövegben meg akarjuk találni a legnagyobb azonos darabot, azaz ha az egyik szöveg $a_1 a_2 \cdots a_n$ és a másik $b_1 b_2 \cdots b_m$, akkor olyan
$1 \le i \le n$ és $1 \le j \le m$ indexeket keresünk, hogy
$$a_{i+1} = b_{j+1}, a_{i+2} = b_{j+2}, \ldots, a_{i+t} = b_{j+t}$$
teljesüljön a lehető legnagyobb t számra. Adjon erre a feladatra $O(mn)$ lépést használó algoritmust.

Algoritmuselmélet vizsgazárthelyi (5 éves képzés)
2007. június 19.

1. Definiálja a 2-3 fát, sorolja fel a műveleteit (az algoritmusokat nem kell leírni). Ha n elemet tárolunk egy 2-3 fában, akkor mennyi lehet a fa minimális, illetve maximális szintszáma? Válaszát indokolja is meg!

2. Írj le az összes pontpárra a legrövidebb út hosszát meghatározó Floyd-algoritmust. Mennyi az algoritmus lépésszáma? (Indokolni nem kell.)

3. Definiálja a PCP nyelvet. Az R, co R, RE, co RE nyelvosztályok közül melyikben van benne ez a nyelv és melyikben nincs? (Bizonyítani nem kell.)

---

4. Adott a síkon n pont, melyek koordinátái (a_1, b_1), $(a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n)$. Olyan
$P = (x, y)$ pontot keresünk a síkon, amire az alábbi összeg minimális.
$$\sum_{i=1}^{n} (|a_i - x| + |b_i - y|)$$
Adjon algoritmust, ami $O(n \log n)$ lépésben meghatároz egy ilyen P pontot.

5. Az L nyelv minden szava a betűk sorozata, azaz $L \subseteq \{a\}^*$. Álljon az $L' \subseteq \{0,1\}^*$ nyelv az olyan k pozitív egész számok bináris alakjából, melyekre $a^k \in L$. Tegyük fel, hogy $L \in \mathrm{TIME}(n^2)$ teljesül. Adjon meg egy olyan $f(n)$ függvényt, melyre biztosan igaz, hogy $L' \in \mathrm{TIME}(f(n))$.

6. Jelölje L_1 az irányítatlan összefüggő gráfokból álló nyelvet és L_2 a Hamilton-kört tartalmazó gráfokból álló nyelvet. Lehetséges-e, hogy $L_1 \prec L_2$, illetve hogy $L_2 \prec L_1$? Válaszát indokolja is meg!

7. Egy hivatal új épületbe fog költözni. Az épület minden emeletén ugyanakkora terület használható fel irodák kialakítására. Minden részleg megmondta, hogy összesen mekkora irodaterületre tart igényt. Azt akarjuk eldönteni, hogy meg lehet-e oldani a költözést úgy, hogy egyetlen részleg se legyen kettévágva, azaz egy részleg teljes egészében egy emeleten legyen (de egy emeletre kerülhet több részleg is). Igazolja, hogy a problémához kapcsolódó nyelv P-ben van, vagy azt, hogy a nyelv NP-teljes.

8. Egy előre rögzített útvonalon úgy indulunk el, hogy az autó L literes tankja tele van. Úticélunkhoz úgy akarunk elérni, hogy legalább egy fél tanknyi benzin maradjon az autóban. Tudjuk, hogy az utunkba eső n benzinkút közül melyikben mennyibe kerül a benzin, továbbá, hogy két szomszédos benzinkút között, valamint a kiindulóponttól az első benzinkútig, illetve az utolsó benzinkúttól a célunkig mennyi benzint fogyaszt az autó. Az egyszerűség kedvéért ha megállunk egy benzinkútnál, akkor mindig tele tankolunk. Adjon algoritmust, ami $O(Ln^2)$ lépésben megmondja, hogy hol álljunk meg tankolni ha azt akarjuk, hogy utunk során a benzinköltség minimális legyen.