

A Számítástudomány alapjai

1. ZH javítókulcs (2022. 11. 03.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.

Természetesen az ismertettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, rész-megoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Lehet-e néhány lépésben egy 42 összefüggő komponensből álló, 88 csúcsú, 111 élű gráfból összefüggő gráfot képezni, ha minden lépésben két élt törölünk és egy élt húzunk be? (Korábban törölt él is behúzható.)

Az ÉHL szerint egy él behúzása legfeljebb 1-gyel csökkenti a komponensek számát. (2 pont)

Az összefüggőség eléréséhez az kell, hogy a komponensek száma 42-ről 1-re csökkenjen, tehát legalább 41 lépést kell végezni. (2 pont)

Ez azonban $2 \cdot 41 = 82$ él törlésével jár. Így az élek száma $111 + 41 - 2 \cdot 41 = 70$ -re csökken, és ha még több lépést végzünk, még tovább csökken az élek száma. (2 pont)

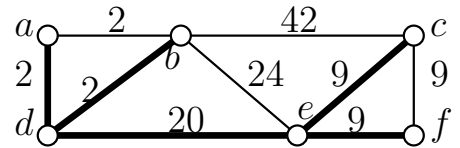
Az órán olyat is tanítottak, hogy minden n csúcsú öf gráfnak van feszítőfája, és a ffa önmagában már $n - 1$ élt tartalmaz. (2 pont)

Ezért ahhoz, hogy öf gráfot kapjunk a lépéssorozat végén, legalább 87 éltre van szükség. (1 pont)

A fentiek szerint legfeljebb 70 él maradhat, így a feladat kérdésére nemleges a válasz. (1 pont)

2. Legfeljebb mennyivel csökken a minimális költségű feszítőfa költsége, ha a bal oldali ábrán látható gráf egyetlen élt törölhetjük, és ugyanilyen költséggel két tetszőleges csúcs között felvehetünk egy új élt? (Az élek irányításától tekintsünk el.)

Az órán tanult Kruskal-algoritmus segítségével elkészítünk egy mkffát az élek beveteléről növekvő költség szerint egyenként döntve. Az ábra egy ilyen F fát mutat. Az F ffa a költsége 42. (6 pont)



Ha G -ből töröljük az F -ben nem szereplő 2 költségű élt, és behúzunk egy új, 2 költségű de élt, akkor a Kruskal-algoritmus outputja annyiban változik, hogy a korábbi de él helyett a most behúzott fog szerepelni. (2 pont)

Az így kapott feszítőfa költsége 24. (1 pont)

Ennél olcsóbb feszítőfát nem kaphatunk, bárhog is alakítjuk a gráfot a feladatban leírt módon. Legfeljebb 3 db 2 költségű él szerepelhet a fában, a maradék két él költsége pedig darabonként legalább 9, ezért nem képzelhető el 24-nél olcsóbb ffa. Ezért a feladat kérdésére a válasz $42 - 24 = 18$. (1 pont)

3. Legfeljebb mennyi lehet a v csúcs fokszáma az irányítatlan G gráfban, ha a jobb oldali ábrán a G egy r -gyökerű BFS-fája látható?

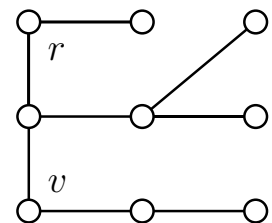
Az órán azt tanították, hogy irányítatlan BFS után nincs szintet ugró él, azaz minden él két olyan csúcs között fut, amelyeknek a fában a gyökértől mért távolsága legfeljebb 1-gyel tér el. (5 pont)

A v csúcs távolsága az r gyökértől 2, ezért v -ből kizárólag az r -től a fában 1, 2 vagy 3 távolságra fekvő csúcsokba vezethet él. (1 pont)

Az r gyökértől 2 csúcs van 1, 2 csúcs (köztük v) 2 és 3 csúcs pedig 3 távolságra. (1 pont)

Ezért v -ből legfeljebb 6 másik csúcsba futhat él, azaz v fokszáma legfeljebb 6 lehet. (2 pont)

A válasz helyességéhez azt is ellenőrizni kell, hogy a v csúcs 6-os fokszáma elérhető. Könnyen látható, hogy ha $E(G)$ pontosan az faélekből és a v -ből induló, szintet át nem ugró élekből áll, akkor a BFS lefuthat úgy, hogy a megadott fát találja meg. Ehhez az szükséges, hogy v apja legyen r után a másodiknak elért csúcs, és v testvérét v -nél hamarabb ériük el. (1 pont)



Sajnos a feladatban nem lett kikötve, hogy G egyszerű. Aki rámutat arra, hogy tetszőlegesen sok párhuzamos él behúzható a jobb oldali ábrába **úgy, hogy ettől a BFS-fa nem változik** annak jár a teljes pontszám.

4. Határozzuk meg a bal oldali ábrán látható PERT probléma minimális végrehajtási idejét! DAG-ot kapunk-e akkor, ha a cf él irányítását megfordítjuk? Ha igen, akkor mennyi lesz az így kapott PERT probléma minimális végrehajtási ideje?

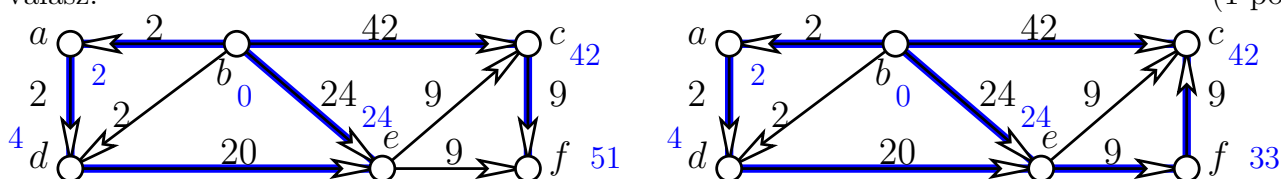
A G csúcsainak topologikus sorrendjét megkaphatjuk az órán megismert forrástöröléses módszerrel. Így adódik a b, a, d, e, c, f sorrend. (3 pont)

Ebben a sorrendben meghatározva az egyes csúcsokhoz tartozó legkorábbi kezdési időpontokat, az ábrán az egyes csúcsok mellett látható értékeket kapjuk. A teljes projekthez szükséges minimális végrehajtási idő tehát 51. (4 pont)

A cf él megfordításával kapott gráfnak is lesz topologikus sorrendje (konkrétan b, a, d, e, f, c), tehát DAG-ot kapunk. (1 pont)

Mivel csak a topologikus sorrend végén van eltérés, csak az f és a c legkorábbi kezdési időpontját kell újraszámolni. Ekkor f kezdési időpontja 33 lesz, c -é pedig 42 marad. (1 pont)

A módosított PERT probléma minimális végrehajtási ideje tehát 42, ez tehát a feladat végső kérdésére is a válasz. (1 pont)



5. A G gráfnak 3 piros, 3 fehér és 5 zöld csúcsa van. Minden piros csúcs össze van kötve minden fehér csúccsal, minden zöld csúcs össze van kötve minden más zöld csúccsal, és más él nincs G -ben. Legkevesebb hány élt kell behúzni G -be az egyszerűség megtartásával ahhoz, hogy az így kapott gráfnak legyen Euler-körsétája?

Az órán azt tanították, hogy az az Euler-körséta szükséges és elégséges feltétele, hogy a gráf izolált pontoktól eltekintve összefüggő legyen, és minden csúcs fokszáma páros legyen. (3 pont)

A G gráfnak két élt tartalmazó komponense van: az egyiket a piros és fehér, a másikat a zöld csúcsok alkotják. (1 pont)

G -ben a piros és fehér csúcsok mindegyikének 3, a zöld csúcsoknak pedig 4 a fokszáma. (2 pont)

Egy él behúzása két csúcs fokszámát változtatja meg, ezért 3 él behúzására mindenképp szükség van. (1 pont)

Ez viszont azt jelentené, hogy zöld csúcsból nem húzunk be élt, így G nem lesz összefüggő. Ezért 3 él behúzása biztosan nem elég, legalább 4-re van szükség. (1 pont)

4 éllel viszont megoldható a feladat: összekötünk egymással két piros ill. két fehér pontot, és a maradék piros ill. fehér pontot egy közös zöld szomszédal kötjük össze. Az így kapott gráf összefüggő, és minden fokszáma páros, van tehát Euler-körsétája. A feladat kérdésére tehát 4 a válasz. (2 pont)

- ★ Legkevesebb hány élt kell behúzni a bal oldalon látható gráf irányítatlan változatába ahhoz, hogy a kapott gráf ne legyen síkbarajzolható?

Egy él behúzása után G még biztosan összefüggő marad, hiszen a behúzott élt tudom a megadott lerajzoláshoz tartozó külső lapon vezetni. Ezért legalább 2 élt kell behúzni ahhoz, hogy G ne legyen síkbarajzolható. (5 pont)

Ha behúzzuk az af és cd éleket, akkor a bd és ec élek törlése után épp egy $K_{3,3}$ gráfot kapunk. Ezek szerint 2 él behúzása elegendő a síkbarajzolhatóság megszüntetésére, a feladat kérdésére 2 a válasz. (5 pont)

Ha valaki megfigyeli, hogy az a csúcs törlése után elég 3 élt behúzni, hogy K_5 -öt kapjunk, és hivatkozik arra, hogy a K_5 nem SRható, akkor ezért 3 pont jár.

A Számítástudomány alapjai

2. ZH javítókulcs (2022. 12. 01.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.

Természetesen az ismertettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, rész-megoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Oldjuk meg az itt látható egyenletrendszert.

Legfeljebb mennyi lehet egy megoldásban az x_2 ismeretlen értéke, ha $x_4 \leq 13$?

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4 \\2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 &= 11 \\2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 5 \\x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 12x_4 &= -8\end{aligned}$$

Kibővített együtthatómátrixot készítünk, és azon végzünk ESÁ-okat mindaddig, míg RLA mátrixot nem kapunk: (2 pont)

$$\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc}1 & 1 & 2 & 0 & 4 & 1 & 1 & 2 & 0 & 4 & 1 & 1 & 2 & 0 & 4 & 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\2 & 3 & 4 & -3 & 11 & 0 & 1 & 0 & -3 & 3 & 0 & 1 & 0 & -3 & 3 & 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \\2 & 1 & 4 & 3 & 5 & 0 & -1 & 0 & 3 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\1 & -3 & 2 & 12 & -8 & 0 & -4 & 0 & 12 & -12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array} \mapsto \begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc}1 & 1 & 2 & 0 & 4 & 1 & 1 & 2 & 0 & 4 & 1 & 1 & 2 & 0 & 4 & 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\0 & -1 & -2 & 12 & -12 & -1 & -2 & 12 & -12 & -12 & -1 & -2 & 12 & -12 & -12 & -1 & -2 & 12 & -12 & -12 \\0 & -1 & -2 & 12 & -12 & 0 & -1 & 0 & 3 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\0 & -1 & -2 & 12 & -12 & 0 & -1 & 0 & 3 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array} \mapsto \begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc}1 & 1 & 2 & 0 & 4 & 1 & 1 & 2 & 0 & 4 & 1 & 1 & 2 & 0 & 4 & 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\0 & -1 & -2 & 12 & -12 & -1 & -2 & 12 & -12 & -12 & -1 & -2 & 12 & -12 & -12 & -1 & -2 & 12 & -12 & -12 \\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array} \quad (4 \text{ pont})$$

Ezek szerint a megoldás $x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ tetszőleges és $x_1 = 1 - 2x_3 - 3x_4$ ill. $x_2 = 3 + 3x_4$. (2 pont)

Ezért $x_4 \leq 13$ esetén x_2 az $x_4 = 13$ választással lesz a lehető legnagyobb, konkrétan $x_2 = 3 + 3 \cdot 13 = 42$. (2 pont)

2. Tegyük fel, hogy $\underline{0} \neq \underline{u} \in \langle \underline{u}_1, \dots, \underline{u}_k \rangle \cap \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_\ell \rangle$. Bizonyítsuk be, hogy az $\{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_k, \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_\ell\}$ vektorok nem lineárisan függetlenek.

Mivel $\underline{u} \in \langle \underline{u}_1, \dots, \underline{u}_k \rangle$ és $\underline{u} \neq \underline{0}$, ezért $\underline{u}$ előáll a $\underline{u}_i$ vektorok nemtriviális lin.komb-jaként: $\underline{u} = \lambda_1 \underline{u}_1 + \dots + \lambda_k \underline{u}_k$, (3 pont)

és hasonlóan $\underline{u} \in \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_\ell \rangle$ miatt $\underline{u}$ a $\underline{v}_i$ vektoroknak is lin.komb-ja: $\underline{u} = \mu_1 \underline{v}_1 + \dots + \mu_\ell \underline{v}_\ell$, (1 pont)

Ezért aztán $\lambda_1 \underline{u}_1 + \dots + \lambda_k \underline{u}_k = \underline{u} = \mu_1 \underline{v}_1 + \dots + \mu_\ell \underline{v}_\ell$ miatt $\lambda_1 \underline{u}_1 + \dots + \lambda_k \underline{u}_k - \mu_1 \underline{v}_1 - \dots - \mu_\ell \underline{v}_\ell = \underline{0}$ teljesül. (4 pont)

Azt kaptuk tehát, hogy $\underline{0}$ előáll az $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_k, \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_\ell$ vektorok nemtriviális lineáris kombinációjaként, (1 pont)

vagyis a kért vektorrendszer nem lehet lin.ftn. (1 pont)

3. Bázist alkotnak-e $\mathbb{R}^3$ -ban a $\underline{v}_1 = (-1, 2, 7)^\top$, $\underline{v}_2 = (1, -3, -6)^\top$ és $\underline{v}_3 = (5, 42, 3)^\top$ vektorok?

Mivel $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, ezért egy $\mathbb{R}^3$ -beli vektorrendszer pontosan akkor alkot bázist, ha három olyan vektort tartalmaz, amelyek lin.ftn rendszert alkotnak. (3 pont)

Ezért a kért három vektor lin.ftn-ségét kell eldöntenünk. (1 pont)

A tanultak szerint a belőlük képzett mátrixot ESÁ-okkal RLA-ra hozzuk: (1 pont)

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 42 \\ 7 & -6 & 3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 2 & -3 & 42 \\ 7 & -6 & 3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & 52 \\ 0 & 1 & 38 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 52 \\ 0 & 0 & 90 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & -57 \\ 0 & 1 & 52 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3 \text{ pont})$$

A RLA mátrix oszlopai lin.ftn-ek, ezért a kiindulási mátrix oszlopai is lin.ftn-ek. (1 pont)

$\mathbb{R}^3$ -ban három lin.ftn vektor bázist alkot, ezért a kért vektorok bázist alkotnak $\mathbb{R}^3$ -ban. (1 pont)

Elég LA mátrixot képezni, ha az indoklásból kiderül, hogy a három oszlop lin.ftn.

4. Tegyük fel, hogy az $A \in \mathbb{R}^{42 \times 42}$ mátrixnak minden olyan eleme 42, ami közvetlenül a főátló alatt vagy felett áll, A minden más eleme 0. Határozzuk meg az $|A|$ determináns értékét!

Megkeressük a nemnulla kifejtési tagokat. (1 pont)

Az első sorban és az első oszlopban egyetlen nemnulla áll, ezekre a helyekre muszáj bástyát tennünk.

Ezzel az első két sorból és oszlopból választottunk bátyát. (2 pont)
A harmadik sorban és oszlopban így már csak egy-egy helyre tehetjük nemnulla pozícióra a bátyát, és ez a két bátya a harmadik és negyedik sorokat és oszlopokat foglalja le. (2 pont)
Hasonlóan folytatva az adódik, hogy egyetlen nemnulla kifejtési tag tartozik a determinánshoz, amit 21 bátyapár határoz meg. (1 pont)
Az így elhelyezett bátyák közül kizárólag az egyszerre elhelyezett párok állnak inverzióban vagyis az inverziószám 21, így a kifejtési tag előjele negatív. (1 pont)
Mivel A minden nemnulla eleme 42, ezért az egyetlen nemnulla kifejtési tag -42^{42} , és ennyi a determináns értéke is. (1 pont)

5. Tetszőleges $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$ vektorra legyen $f(\underline{u}) = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_1 \end{pmatrix}$ valamint $F(\underline{u}) := 42f(\underline{u}) - f(f(\underline{u}))$. Lineáris

leképezés-e az $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ függvény? Ha igen, akkor adjuk meg a leképezés $[F]$ mátrixát!

Könnyen látható, hogy $f(\lambda \underline{u}) = \lambda f(\underline{u})$, mert mindkét vektor a $\lambda \underline{u}$ vektor koordinátáinak ciklikus permutációja. Hasonlóan $f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$, mert mindkét vektor az $\underline{u} + \underline{v}$ vektor koordinátáinak ciklikus permutációja. (2 pont)

Ezért aztán $F(\lambda \underline{u}) = 42f(\lambda \underline{u}) - f(f(\lambda \underline{u})) = 42\lambda f(\underline{u}) - f(\lambda f(\underline{u})) = \lambda \cdot 42f(\underline{u}) - \lambda f(f(\underline{u})) = \lambda(42f(\underline{u}) - f(f(\underline{u}))) = \lambda F(\underline{u})$ (1 pont)

Hasonlóan $F(\underline{u} + \underline{v}) = 42f(\underline{u} + \underline{v}) - f(f(\underline{u} + \underline{v})) = 42(f(\underline{u}) + f(\underline{v})) - f(f(\underline{u}) + f(\underline{v})) = 42f(\underline{u}) + 42f(\underline{v}) - f(f(\underline{u})) - f(f(\underline{v})) = 42f(\underline{u}) - f(f(\underline{u})) + 42f(\underline{v}) - f(f(\underline{v})) = F(\underline{u}) + F(\underline{v})$, (1 pont)

Tehát F lineáris leképezés. (1 pont)

A tanultak szerint $[F] = (F(\underline{e}_1), F(\underline{e}_2), F(\underline{e}_3), F(\underline{e}_4))$. (1 pont)

F definíciója szerint $F(\underline{e}_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 42 \end{pmatrix}$, $F(\underline{e}_2) = \begin{pmatrix} 42 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $F(\underline{e}_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 42 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $F(\underline{e}_4) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 42 \\ 0 \end{pmatrix}$, (3 pont)

tehát $[F] = \begin{pmatrix} 0 & 42 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 42 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 42 \\ 42 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. (1 pont)

★ Legyen $f(p) := \begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 4 \\ p & 1 & 42 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & -6 \end{vmatrix}$. Számítsuk ki az $f(42) - f(41)$ értéket.

Az első oszlop szerinti kifejtésből $f(p) = 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 42 & 3 \\ 2 & -3 & -6 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 1 & 42 & 3 \\ 2 & -3 & -6 \end{vmatrix} + p \begin{vmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -6 \end{vmatrix}$ adódik. (3 pont)

Ezért $f(42) - f(41) = 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 42 & 3 \\ 2 & -3 & -6 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 1 & 42 & 3 \\ 2 & -3 & -6 \end{vmatrix} + 42 \begin{vmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -6 \end{vmatrix} - 41 \begin{vmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -6 \end{vmatrix}$ teljesül. (3 pont)

Az ESÁ-ról tanultak szerint $\begin{vmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -8 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -8 \\ 0 & 4 & 28 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -8 \\ 0 & 1 & -10 \\ 0 & 4 & 28 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -8 \\ 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 68 \end{vmatrix}$ (2 pont)

Felső háromszögmátrix determinánsa a főátlóban álló elemei szorzata, (1 pont)

ezért a keresett kifejezés értéke $f(42) - f(41) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -8 \\ 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 68 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 68 = 68$. (1 pont)

A Számítástudomány alapjai

1. pZH javítókulcs (2022. 11. 21.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.

Természetesen az ismertettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, rész-megoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Legfeljebb mennyivel növelhető a minimális költségű feszítőfa költsége, ha a bal oldali ábrán látható G gráf egyetlen élét törölhetjük, és ugyanolyan költséggel két csúcs között behúzzunk egy új élt, ami akár G egy élével párhuzamos is lehet?

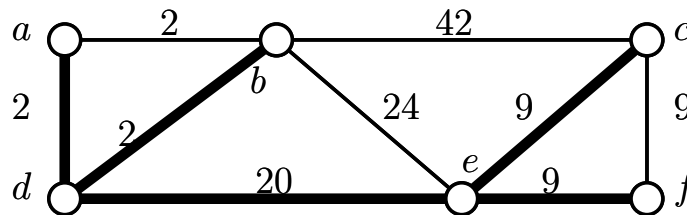
A Kruskal algoritmust lefuttatva, az élköltségek növekvő sorrendjében döntve az egyes élek feszítőfába történő beválasztásáról az ábrán látható 42 költségű F mkffát kapjuk. (4 pont)

Ha G -nek olyan élét töröljük, ami nincs benne ebben a feszítőfában, akkor F továbbra is feszítőfa marad, tehát a költség így nem növekedhet. (2 pont)

Ha valamelyik 2 vagy 9 költségű élt töröljük, akkor bárhová is húzzuk be az új élt, továbbra is marad G -nek egy 42 költségű feszítőfája. (2 pont)

Ha azonban a 20 költségű élt töröljük, akkor az így kapott gráf mkffájának költsége 46 lesz, ugyanis a 20 költségű él helyett a 24 költségű kerül a feszítőfába. Ez akkor is így lesz, ha behúzzunk egy 24 költségű élt valamelyik olcsó éllel párhuzamosan. (1 pont)

A feladat kérdésére tehát 4 a válasz. (1 pont)



2. Legfeljebb mennyi lehet a v csúcs fokszáma az irányítatlan, egyszerű G gráfban, ha a jobb oldali ábrán G egy r -gyökerű DFS-fája látható?

Az órán azt tanították, hogy irányítatlan DFS után nincs keresztél, azaz minden él két olyan csúcs között fut, amelyeknek a fában ugyanazon a gyökerből induló úton vannak. (5 pont)

A konkrét gráfnak a gyökerből v -be vezető útját egyetlenféleképp lehet v -n túl egy levélig meghosszabbítani, ezért v minden szomszédjának ezen az úton kell lennie. (2 pont)

Összesen 4 v -től különböző csúcs van ezen az úton, ezért v fokszáma is legfeljebb 4 lehet. (2 pont)

A válasz helyességéhez azt is ellenőrizni kell, hogy a v csúcs 4-os fokszáma elérhető. Ez pedig abból látszik hogy ha a fához hozzáadjuk a két további v -ből induló élt, akkor a DFS lefuthat úgy, hogy először ezen út mentén éri el az út (v -vel együtt) 5 csúcsát, majd a többi csúcsot. (1 pont)

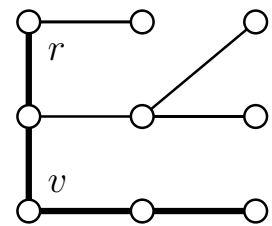
3. Legfeljebb hány éle lehet az egyszerű, irányított G gráfnak, ha G -nek a, b, c, d, e és d, b, c, a, e is topologikus sorrendje?

A topologikus sorrend definíciója miatt G minden éle olyan, hogy a topologikus sorrendben korábbi csúcsból egy, a sorrendben későbbi csúcsba fut. (3 pont)

Ezért az a csúcsból csakis az e csúcsba, b -ből csakis a c és e csúcsokba, c -ből kizárólag e -be, d -ből csak e -be, e -ből pedig semmilyen más csúcsba nem futhat él. (5 pont)

Ezek szerint G -nek legfeljebb 5 éle lehet. (1 pont)

Mivel a fent említett 5 él olyan DAG-ot alkot, aminek topologikus sorrendje mindkét megadott sorrend, ezért az előbb felső becslésként igazolt 5 él elérhető, és feladat kérdésére 5 a helyes válasz. (1 pont)



4. A G gráfnak 3 piros, 3 fehér és 5 zöld csúcsa van. Minden piros csúcs össze van kötve minden fehér csúccsal és minden zöld csúcs össze van kötve minden más zöld csúccsal, más él nincs G -ben. Van-e G -nek Hamilton-köre? Ha nincs, akkor legkevesebb hány élt kell behúzni G -be ahhoz, hogy a kapott gráfnak legyen Hamilton-köre?

A G gráfnak két komponense van: az egyiket a piros és fehér, a másikat a zöld csúcsok alkotják. (2 pont)

Mivel Hamilton-körrel rendelkező gráfok összefüggők, ezért G -nek nincs Hamilton-köre, és legalább 1 élt be kell húzni a két komponens közé ahhoz, hogy a kapott gráfnak legyen. (1 pont)

Ám ha csak egy élt húzunk be a két komponens közé, a behúzott él egyik végpontját elhagyva két komponensre esik szét a gráf, (2 pont)

vagyis továbbra sem teljesül a Hamilton-kör létezésének szükséges feltétele. (1 pont)

Könnyen látható, hogy ha egy piros és egy zöld, illetve egy fehér és egy másik zöld csúcs közé húzunk be egy-egy élt, akkor e két él behúzásának hatására a kapott gráf egyszerű marad, és lesz Hamilton-köre is. (3 pont)

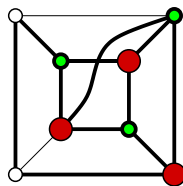
Ezért a feladat kérdésére a válasz az, hogy legkevesebb két él behúzására van szükség. (1 pont)

5. Tekintsünk egy kockát és annak egy testátlóját. Legyenek a G gráf csúcsai a kocka csúcsai, és két csúcs között akkor fusson él G -ben, ha e csúcsok a kocka egy élének vagy a kijelölt tetstátlójának a végpontjai. Síkbarajzolható-e az így definiált G gráf?

A tanultak szerint ha mutatunk G -nek egy topologikus $K_{3,3}$ részgráfját, akkor G nem síkbarajzolható. (E helyett hivatkozhatunk a Kuratowski-tételre is.) (3 pont)

A mellékelt ábra a kérdéses gráfot mutatja. (1 pont)

A megvastagított élek és a megjelölt csúcsok G egy topologikus $K_{3,3}$ részgráfját ábrázolják. G tehát nem síkbarajzolható. (6 pont)



- ★ Lehet-e néhány lépésben egy 42 komponensből álló, 77 csúcsú, 66 élű egyszerű gráfból körmentes, egyszerű gráfot képezni, ha minden lépésben egy élt törölünk és két élt húzunk be? (Korábban törölt él is behúzható.)

Ha sikerül körmentes gráfot kapni, akkor az eredeti G gráf éleiből megmaradó élek egy legalább 42 komponensből álló erdőt alkotnak. (2 pont)

Ennek az erdőnek $77 - k$ éle van, ahol $k \geq 42$ a komponensek száma. (2 pont)

Ezek szerint az erdő élszáma legfeljebb $77 - 42 = 35$, így az eredeti G gráfból legalább $66 - 35 = 31$ élt kell törölni. (2 pont)

Pusztán ezen törlésekhez legalább 31 lépésre van szükség. (1 pont)

Minden lépésben 1-gyel nő az élszám, tehát 31 lépés után a gráfnak legalább $66 + 31 = 97$ éle lesz. (1 pont)

Azt tanították, hogy egy körmentes 77 csúcsú egyszerű gráfnak legfeljebb 76 éle lehet, így a feladat kérdésére nemleges a válasz. (2 pont)

2. pZH javítókulcs (2022. 12. 14.)

Természetesen az ismertettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, rész-megoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

- $$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 & = & 10 \\ x_1 + x_2 + 4x_4 & = & 3 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 11x_4 & = & 22 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc|cccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 10 & 1 & 2 & 2 & 1 & 10 & 1 & 2 & 2 & 1 & 10 & 1 & 2 & 0 & 5 & 4 & 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & 3 & 0 & -1 & -2 & 3 & -7 & 0 & 1 & 2 & -3 & 7 & 0 & 1 & 2 & -3 & 7 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 11 & 22 & 0 & -3 & -5 & 7 & -18 & 0 & -3 & -5 & 7 & -18 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 3 \end{array} \rightarrow (4 \text{ pont})$$

konkrétan $x_1 = 5, x_2 = 2, x_3 = 1$ és $x_4 = -1$. (0 pont)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & x_1 \\ -1 & 4 & 3 & x_2 \\ 2 & -4 & 2 & x_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & x_1 \\ 0 & 3 & 6 & x_1 + x_2 \\ 0 & -2 & -4 & -2x_1 + x_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & x_1 \\ 0 & 1 & 2 & -x_1 + x_2 + x_3 \\ 0 & -2 & -4 & -2x_1 + x_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & x_1 \\ 0 & 1 & 2 & -x_1 + x_2 + x_3 \\ 0 & 0 & 0 & -4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \end{pmatrix} \quad (4 \text{ pont})$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -7 \\ -2 & 1 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -10 \\ 0 & 5 & 10 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 10 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Ezek szerint $\underline{v} = -3\underline{b}_1 + 2\underline{b}_2$, ezért a keresett koordinátavektor $[\underline{v}]_B = (-3, 2)^\top$. (3 pont)
4. A p paraméter milyen értékére lesz a $\begin{vmatrix} 1 & 2 & p & p \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & 3 & 3 \\ p & 0 & 2 & p \end{vmatrix}$ determináns 42?

Megkeressük a nemnulla kifejtési tagokat. (1 pont)

Az második sorban és a második oszlopban egyetlen nemnulla áll, ezekre a helyekre muszáj bástyát tennünk. (2 pont)

Ezzel az első két sorból és oszlopból választottunk bástyát. (2 pont)

A harmadik és negyedik sorban így már csak egy-egy helyre tehetjük nemnulla pozícióra a bástyát, és ez két lehetséges bástyaelhelyezést eredményez. (2 pont)

Az egyikhez a $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot p = 12p$ szorzat tartozik, mégpedig negatív előjellel, u.i. csak az első két sorban álló bástyák alkotnak ÉK-DNy-i párt. (1 pont)

A másik szorzat $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 24$, és ehhez pozitív előjel tartozik, hiszen csak az első és második ill. a harmadik és negyedik sorban álló bástyák alkotnak ÉK-DNy-i párt. (1 pont)

Azt a p -t keressük tehát, amire $24 - 12p = 42$. Ez pontosan akkor teljesül, ha $p = -\frac{18}{12} = -\frac{3}{2}$. (1 pont)

Természetesen a kifejtési tétellel is dolgozhatunk.

A második sor szerint kifejtve a determinánst
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & p & p \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & 3 & 3 \\ p & 0 & 2 & p \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 2 & p & p \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & p \end{vmatrix}$$
 adódik. (5 pont)

A kapott determinánst az első oszlopa szerint kifejtve pedig $-2 \begin{vmatrix} 2 & p & p \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & p \end{vmatrix} (-2) \cdot 2 \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & p \end{vmatrix} = -4 \cdot (3p - 6) = -12p + 24$ lesz a végeredmény. (4 pont)

Ezek szerint $-12p + 24 = 42$, azaz $p = -\frac{3}{2}$. (1 pont)

5. Legyen $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ esetén $f(\underline{u}) = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_1 \end{pmatrix}$ és $g(\underline{u}) = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_4 \\ u_3 \end{pmatrix}$. Lineáris leképezés-e az $F(\underline{u}) = g(f(\underline{u}))$ függvény? Ha igen, akkor adjuk meg a leképezés $[F]$ mátrixát!

Könnyen látható, hogy $f(\underline{u}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$, (2 pont)

azaz f mátrixszorzással áll elő, így f lin.lekép. (1 pont)

Szintén ellenőrizhető, hogy $g(\underline{u}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$, így g is lineáris leképezés. (2 pont)

Az $F = g \circ f$ leképezés mátrixa e két mátrix szorzata, azaz (2 pont)

$$[F] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
 (3 pont)

A mátrixok összeszorzása helyett az is tökéletes megoldás, ha mekeressük, hogy a standard bázis egységvektorai hova képződnek, és ezekből a képekből, mint oszlopokból építjük fel az $[F]$ mátrixot.

★ Legyen $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ és $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 42 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$. Van-e olyan $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mátrix, amire $AB = C$? Ha van, akkor számítsuk ki $|B|$ -t!

Azt tanították, hogy egy C mátrix pontosan akkor áll elő AB alakban, ha C minden oszlopa az A oszlopainak lineáris kombinációja. (2 pont)

Könnyen látható (pl. az első oszlop szerinti kifejtésből), hogy $|A| = 1 \neq 0$, ezért az A mátrix oszlopai lin.ftn-ek, így $\mathbb{R}^3$ bázisát alkotják. (2 pont)

Ezek szerint C előáll $C = AB$ alakban. (1 pont)

A determinánsok szorzástétele miatt ekkor $|A| \cdot |B| = |C|$, (2 pont)

és mivel C felső háromszögmátrix, C determinánsa a főátlóbeli elemei szorzata, azaz $|C| = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$. (2 pont)

Ezek szerint $1 \cdot |B| = 42$, így a feladat kérdésére $|B| = 42$ a válasz. (1 pont)

Nem tilos (csak macerás) a B kiszámítása (pl. $A^{-1}C$ alakban), és a konkrét mátrix determinánsának meghatározása.