A Számítástudomány alapjai

1. ZH javítókulcs (2021. 11. 05.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.
Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. 456 piréz óvodás piros lámpa, zöld lámpa játékkal dönti el, hogy ki vehet részt az 50 évente rendezett kanászati világkiállítás bejáratánál felállított óriásmozaik elkészítésében, ami a csodatévő ártányt ábrázolja, csillogó mangalicapikkelyekből kirakva. Az nyer, aki a játék ideje alatt nem esik ki és áthalad a célvonalon. Tudjuk, hogy 42 nyertes lett, a nyertesek különböző időpontokban haladtak át a célvonalon, és a 456-os számú játékos nyert, a 42-es számú viszont kiesett. Ezen feltételek mellett a nyertesek hányféle sorrendben léphették át a célvonalat?

   A 456-os óvodás melletti 41 nyertes versenyző nem lehet a sem a 42-es, sem a 456-os számú, de a többi 454 óvodás bármelyike lehet. (2 pont)
   Ennek megfelelően a nyertesek halmaza $\binom{454}{41}$-féle lehet. (3 pont)
   A 42 nyertes versenyző beérkezési sorrendje a 42!-féle lehetséges sorrend bármelyike lehet, (3 pont)
   ezért a feladat kérdésére a válasz $\binom{454}{41} \cdot 42!$, (2 pont)
   ami felírható $42 \cdot 414 \cdot 415 \cdot \ldots \cdot 454$ alakban is. (0 pont)

   A feladat megfogalmazása sajnos nem volt egyértelmű. Jogos értelmezés az is, hogy a 42 nyertes rögzített (és persze rájuk teljesülnek a megadott feltételek), és a kérdés az, hogy hányféleképp lehet őket sorba rendezni. Erre persze a válasz a 42!, és ha ezt a hallgató helyesen indokolja, akkor jár érte a teljes pontszám.

2. Tegyük fel, hogy a 15-csúcsú, egyszerű G gráf élei úgy vannak piros, fehér és zöld színre színezve, hogy a piros élek egy feszítőfát, a fehérek pedig Hamilton-kört alkotnak. Mennyi a zöld élek száma, ha a $\overline{G}$ komplementernek épp 34 éle van?

   A piros élek a 15-csúcsú gráf feszítőfáját alkotják, ezért a piros élek száma 14. (2 pont)
   A fehér élek Hamilton-kört határoznak meg, ezért 15 él kapott fehér színt. (2 pont)
   A 15-csúcsú teljes gráfnak $\binom{15}{2} = 105$ éle van. (2 pont)
   Ebből 34 él a komplementerhez tartozik, és nem kapott színt. (2 pont)
   Ezek szerint a zöld élek száma $105 - 14 - 15 - 34 = 42$-nek adódik. (2 pont)

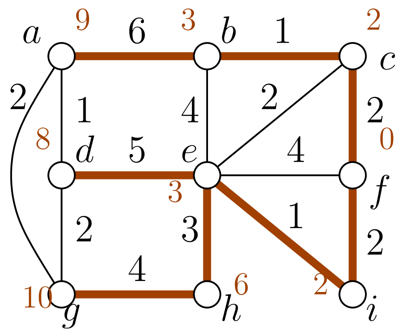
3. Van-e olyan b-ből indított DFS bejárása az ábrán látható G gráfnak, ami után az eb, ed és ef élek mindegyike faél lesz? (Az élekre írt számoktól tekintsünk el.)

   Igen, van ilyen mélységi bejárás. Például úgy kaphatunk ilyet, hogy az egyes csúcsok elérése és befejezése az alábbi sorrendben történik (a befejezést zárójellel jelezzük):
   $b, e, f, i, (i), c, (c), (f), d, a, g, h, (h), (g), (a), (d), (e), (b)$. (10 pont)

   Megadhatjuk a bejárást a feszítőfa segítségével is, de ekkor is meg kell mondani, hogy a fa egyes csúcsait (illetve ágait) milyen sorrendben éri el a DFS bejárás. Ez utóbbi hiányáért (egyébként helyes fa esetén) 4 pontot vonunk le.

   Ha valaki rossz választ ad, de az érveléséből kiderül, hogy világosan látja, hogy dolgozik a DFS, akkor 3 pontot kap.

4. Van-e az ábrán látható G gráfnak olyan feszítőfája, ami az f csúcsból minden más csúcsba tartalmazza a G egy legrövidebb útját? Ha igen, adjunk meg egy ilyen feszítőfát.
   (Az élekre írt számok most az élek hosszait jelentik.)
   Az órán azt tanították, hogy nemnegatív élhosszok esetén tetszőleges gyökérhez van legrövidebb utak fája, és ilyet a gyökérből indított Dijkstra algoritmussal lehet találni. Az első kérdésre tehát igenlő a válasz. (2 pont)



Ezért az f csúcsból futtatjuk a Dijkstra algoritmust a megadott élhosszokkal, és a keresett legrövidebb utak fáját azok az élek alkotják, amik az egyes csúcsok végső (f, ℓ)-felső becsléseit beállítják. (2 pont)
Az ábra a kapott legrövidebb utak fáját mutatja az egyes csúcsok f gyökértől mért távolságaival, a táblázat pedig az (f, ℓ)-felső becslések alakulását ill. a KÉSZ halmaz bővülését mutatja. (6 pont)
Az is hibátlan érvelés, ha nem részletezett módon megtalálunk egy feszítőfát (pl. az ábrán barnával jelzettet) és arra hivatkozunk, hogy a fán mért (barnával jelzett) távolságok egyrészt felső becslést adnak a legrövidebb utak hosszaira, másrészt pedig ezen az (f, ℓ)-felső becslésen egyetlen élmenti javítás sem tud változtatni.

a	b	c	d	e	f	g	h	i
∞	∞	∞	∞	∞	$\boxed{0}$	∞	∞	∞
∞	∞	$\boxed{2}$	∞	4	0	∞	∞	2
∞	3	2	∞	4	0	∞	∞	$\boxed{2}$
∞	$\boxed{3}$	2	∞	3	0	∞	∞	2
9	3	2	∞	$\boxed{3}$	0	∞	∞	2
9	3	2	8	3	0	∞	$\boxed{6}$	2
9	3	2	$\boxed{8}$	3	0	10	6	2
$\boxed{9}$	3	2	8	3	0	10	6	2
9	3	2	8	3	0	$\boxed{10}$	6	2

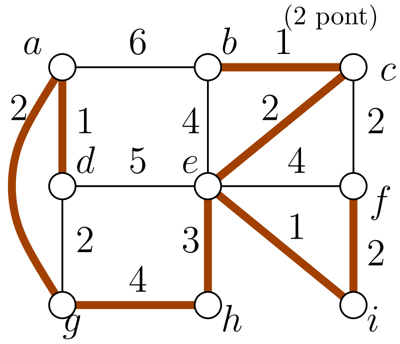
5. Legkevesebb hány élt kell törölni az ábrán látható G gráfból ahhoz, hogy a kapott G' gráfnak legyen Euler-sétája? (Az élekre írt számoktól tekintsünk el.)

Egy gráfnak pontosan akkor van Euler-sétája, ha izolált pontoktól eltekintve összefüggő, (1 pont)
és legfeljebb két páratlan fokszámú csúcsa van. Ilyen gráfot szeretnénk létrehozni. (2 pont)
G-nek pontosan 6 páratlan fokú csúcsa van: a, b, c, d, g és f. (1 pont)
Mivel egy él elhagyása két csúcs fokszámát változtatja meg, ezért legalább két élt kell G-ből törölni ahhoz, hogy he maradjon 2-nél több páratlan fokú csúcs. (2 pont)
Ha töröljük az ab és dg éleket G-ből, akkor a kapott gráf összefüggő marad és a ptn fokú c és f csúcsok kivételével minden más csúcs fokszáma páros lesz. (2 pont)
Ezért két él törlésével elérhető az Euler-séta megléte. (1 pont)
A feladatban feltett kérdésre tehát pontosan 2 a válasz. (1 pont)

$\boxed{\star}$ Az ábrán látható G gráf kilenc várost és az azokat összekötő utakat mutatja. Úgy szeretnénk újraaszfaltozni néhány útszakaszt, hogy bármely városból bármely másik városba el lehessen jutni újraaszfaltozott útvonalon, de ehhez a lehető legkevesebb aszfaltra legyen szükség. Hogyan végezzük el ezen feltétel mellett a felújítást, ha azt is el szeretnénk érni, hogy az a városból c-be vezető felújított útvonal a lehető legrövidebb legyen? (Az élekre írt számok az adott útszakasz hosszát jelentik, az aszfaltozáshoz szükséges mennyiség pedig a hosszal arányos.)

Az órán azt tanították, hogy egy F feszítőfa pontosan akkor mkffa, ha minden G_c gráfnak tartalmazza feszítő erdejét, ahol G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta részgráf. (2 pont)
Mivel G_3-ban a és c különböző komponensbe esnek, de a G_4 gráf összefüggő, ezért a G_3 két komponensét összekötő 4 költségű gh élnek mindenképpen a mkffa ac útján kell lennie. (2 pont)
A h csúcsból csakis a he élen haladhat tovább ez az út, tehát he is a keresett ac-út éle. (1 pont)
Könnyen látható, hogy sem a és g között, sem e és c között nem vezethet az őket összekötő 2 hosszúságú élnél rövidebb út. Ezért bárhogyan is választjuk a mkffát, annak ac útjának legalább $2 + 4 + 3 + 2 = 11$ a hossza. (2 pont)

Könnyen ellenőrizhető, hogy a Kruskal-algoritmus futtatható úgy, hogy ag, gh, he, ec élei legyenek a kapott mkffának. Az ábrán egy ilyen mkffa látható. Ezért ha ennek az éleit újítjuk fel, akkor nem csupán a lehető legkevesebb aszfaltot használjuk fel, de ezen feltétel mellett a felújított szakaszokon futó ac-út is a lehető legrövidebb lesz. (3 pont)
Egy legrövidebb ac-út éleinek Kruskal-lépésekkel történő feszítőfává hízlalása elvi hibás megoldás. A Kruskal ismeretéért 1 pont jár.



A Számítástudomány alapjai

2. ZH javítókulcs (2021. 12. 03.)

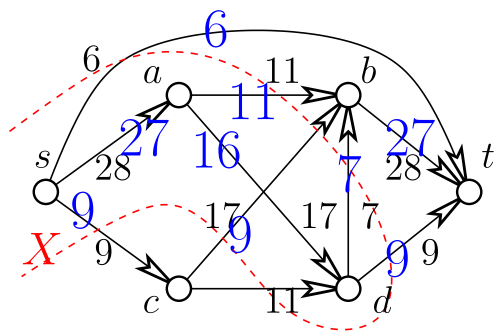
Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.
Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Határozzuk meg az ábrán látható G gráf kromatikus számát, és állapítsuk meg, hogy egyetlen további él behúzásával elérhető-e, hogy a kapott G' gráf kromatikus számára $\chi(G') = \chi(G) + 1$ teljesüljön. (Az élekre írt számoktól és az élek irányításától tekintsünk el.)

   Az a, b és d csúcsok egy K_3 részgráfot feszítenek, ezért $\chi(G) \geq \omega(G) \geq 3$. (3 pont)
   A G gráf kiszínezhető 3 színnel, hiszen az a, c, t csúcsokat 1-es, az s és b csúcsot 2-es, míg a d csúcsot 3-as színnel színezzük, akkor jó színezét kapunk. (2 pont)
   Ezért a G gráf kromatikus száma $\chi(G) = 3$. (1 pont)
   Ha azonban behúzzuk az ac élt, (1 pont)
   akkor a, b, c, d egy K_4 részgráfot feszít, így $\chi(G') \geq \omega(G') \geq 4$. (1 pont)
   Az így kapott G' ki is színezhető 4 színnel, és ehhez elég, ha a G fenti színezésében a c csúcsot 4-es színűre átszínezzük. (1 pont)
   Ezért a feladat második kérdésére igenlő a válasz: elérhető egyetlen él behúzásával, hogy a kromatikus szám 1-gyel nőjön. (1 pont)

   Természetesen nem csak az ac él behúzásával lehet indokolni a igenlő választ, hasonlóan igazolható ugyanez pl. a ct él segítségével is.

2. Keressünk az ábrán látható hálózatban maximális nagyságú st-folyamot. Változik-e a maximális folyamnagyság akkor, ha a cb él kapacitását $\sqrt{2}$-vel megnöveljük?



   A javító utas algoritmussal meghatároztuk az ábrán látható 42 nagyságú st-folyamot. Ehhez az $st(6)$, $sabt(11)$, $scdt(9)$, $sadbt(7)$ ill. $sadcbt(9)$ javításokat végeztük, a zárójelben az adott javítás során küldött folyammennyiség áll. (5 pont)
   A kapott folyamhoz tartozó segédgráfban s-ből az $X = \{s, a, d\}$ csúcsok érhetők el javító úton, és ez az X halmaz egy 42 kapacitású st-vágást indukál. Ezért a megtalált 42 nagyságú folyam csakugyan maximális. (3 pont)
   A cb él kapacitásának növelése hatására a $c(X)$ kapacitás nem növekszik, 42 marad. Ezért a maximális folyamnagyság sem nőhet ettől, így a feladat második kérdésére nemleges a válasz. (2 pont)

   A folyam maximalitásának igazolásához nem szükséges a folyamalgoritmusra hivatkozni: ha valaki (bárhogy) talál egy 42 nagyságú folyamot, és egy 42 kapacitású vágást, és erre megfelelően hivatkozik, akkor azért jár a pont. (Vagy éppenséggel akkor is, ha világosan kijelenti (és bizonyítja), hogy a 42 nagyságú folyamhoz tartozó segédgráfban már nincs st-út.) Ha azonban csak egy 42 nagyságú folyamra mutat rá a megoldó (amiről nem világos, hogyan keletkezett), és bizonyítékot nem ad a maximalitásra, akkor ez csak minimálisan visz közelebb a megoldáshoz.

3. Tegyük fel, hogy a 100 csúcsú $G = (A + B, E)$ páros gráf A és B színosztályára is teljesül a Hall-feltétel. Határozzuk meg a lefogó ponthalmaz minimális méretét, $\tau(G)$-t.

   A Hall tétel szerint ha egy G páros gráf A színosztályára teljesül a Hall-feltétel, akkor G-nek van az A színosztályt fedő párosítása. (2 pont)
   Ezek szerint a feladatbeli G gráfnak olyan párosítása is van, ami az A színosztályt fedi, és olyan is, ami a B színosztályt. (2 pont)
   Ha most az A színosztályt fedő párosítás nem fedné a B színosztályt, akkor $|A| < |B|$ teljesülne, de ekkor nem létezhetne G-ben olyan párosítás, ami a B színosztályt fedi. Ezért az A színosztályt fedő párosítás fedi a B színosztályt is, azaz G egy teljes párosításáról van szó. (2 pont)
   A G gráfnak van tehát teljes párosítása, ezért, mivel 100 csúcsa van, a független élei maximális száma $\nu(G) = \frac{|V(G)|}{2} = \frac{100}{2} = 50$. (2 pont)
   Kőnig tanult tétele miatt pedig $\tau(G) = \nu(G) = 50$ a feladat kérdésére a válasz. (2 pont)

4. Síkbarajzolható-e az ábrán látható G gráf? (Az élekre írt számoktól és az élek irányításától tekintsünk el.)

   Kuratowski tanult tétele szerint G pontosan akkor síkbarajzolható, ha nem tartlamazza részgráfként sem a K_5 sem pedig a $K_{3,3}$ gráf soros bővítését. Ha tehát mutatunk egy ilyen tiltott részgráfot, akkor abból azonnal adódik, hogy G nem síkbarajzolható. (3 pont)
   Ha a G gráfból töröljük a bd élt, akkor az így kapott részgráf épp a $K_{3,3}$ lesz: az s, b, d csúcsok alkotják az egyik, az a, c, t csúcsok pedig a másik színosztályt. E tiltott részgráf miatt pedig G nem síkbarajzolható. (7 pont)

5. Hány olyan x egész szám van, amire egyaránt teljesül, hogy $42x \equiv 24$ (100) és hogy $42 \leq x < 4242$?

   Mivel $(42, 100) = 2 \mid 24$, ezért az órán tanult tétel szerint a $42x \equiv 24$ (100) lineáris kongruencia megoldható, és a megoldások pontosan 2 db modulo 100-as maradékosztályt alkotnak. (6 pont) A $[42, 4242)$ intervallum pontosan 4200 egész számot tartalmaz, és minden modulo 100 maradékosztályból pontosan 42 szám esik bele. (3 pont)
   Ezért a két megoldás-maradékosztály mindegyike 42 keresett x-et tartalmaz. A feladat kérdésére a válasz tehát az, hogy $42 + 42 = 84$ ilyen egész szám van. (1 pont)

   Természetesen az is teljes értékű megoldás, ha valaki helyesen megoldja a kongruenciát (7 pontért) és a konkrét $x \equiv 22$ (50) megoldásból határozza meg a megadott intervallumba eső megoldások számát (3 pontért).

$\boxed{\star}$ Bizonyítsuk be, hogy bárhogyan is színezzük ki a K_{42} teljes gráf éleit 7 színnel, biztosan található benne a $K_{3,3}$-nak vagy a K_5-nek olyan soros bővítése, amelynek minden éle ugyanolyan színt kapott.

A K_{42} gráf élszáma $\binom{42}{2} = \frac{42 \cdot 41}{2} = 21 \cdot 41$. (1 pont)
Mivel az éleket 7-féle színnel színezzük, lesz olyan szín, amivel az élek legalább hetedrészét fogjuk megszínezni, azaz legalább $(21 \cdot 41)/7 = 3 \cdot 41 = 123$ él ugyanolyan színt fog kapni. (2 pont)
Az órán azt tanították, hogy egy n-csúcsú, egyszerű, síkbarajzoható gráfnak $n \geq 3$ esetén legfeljebb $3n - 6$ éle lehet. (2 pont)
Ez $n = 42$ esetén $3 \cdot 42 - 6 = 120$-as felső korlátot ad az élszámra. (1 pont)
Tekintettel arra, hogy bizonyosan lesz 123 egyszínű él, és egy síkbarajzolható, 42-csúcsú gráfnak legfeljebb 120 éle lehet, ezért a 7 szín valamelyikére színezett élek nem síkbarajzolható, csupa egyszínű élt tartalmazó részgráfot alkotnak. (1 pont)
Kuratowski tanult tétele szerint pedig e részgráf bizonyosan tartalmazza részgráfként a K_5 vagy a $K_{3,3}$ soros bővítését. Ezzel pedig igazoltuk a feladat állítását. (3 pont)

A Számítástudomány alapjai

1. pZH javítókulcs (2021. 12. 15.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.
Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. 9 piréz óvodás kkanbu játékot játszik, ezért 4 párt alkot. Minden párból az egyik játékos győz, a másik veszít. (Természetesen az egyik óvodás pár nélkül marad, nem játszik.) Hányféleképp lehet kialakítani az egymás ellen játszó párokat, ha tudjuk, hogy a 456-os jelű óvodásnak van párja, de az nem a 067-es jelű, aki szintén a 9 óvodás egyike?

   Olyan módszerrel generáljuk a leszámlálandó objektumokat, amivel minden egyes beosztást pontosan egyszer kapunk meg. A 456-os játékos párját 7-féleképp választhatjuk, hisz ez bárki lehet a 067-esen kívül. (2 pont)
   A maradék 7 játékos bármelyike lehet a pár nélkül maradó játékos, ez is tehát 7 lehetőség. (2 pont)
   A maradék 6 játékos közül a legkisebb sorszámú párját 5-féleképp választhatjuk, majd a maradék 4 játékos közül a legkisebb sorszámú párjára pontosan 3 lehetőség adódik. A maradék 2 játékosnak ezek után párt kell alkotnia. (4 pont)
   Világos, hogy a fenti módszer minden beosztást pontosan egyféleképp generál, (1 pont)
   és a fenti döntések esetén a lehetőségek száma független az előző döntésektől. Ezért a válasz a fenti számok szorzata: $7^2 \cdot 5 \cdot 3 =$ (1 pont)
   $= 735.$ (0 pont)

2. Tegyük fel, hogy a K_{12} teljes gráf minden élét úgy színeztük a piros, fehér vagy zöld színek valamelyikére, hogy minden csúcsra pontosan 5 piros él illeszkedik, és a fehér élek a K_{12} egy feszítőfáját alkotják. A zöld élek pedig úgy vannak irányítva, hogy minden v-től különböző csúcsból pontosan két zöld él vezet ki. Hány zöld él lép ki a v csúcsból?

   A K_{12} éleinek száma $\binom{12}{2} = 6 \cdot 11 = 66$. (1 pont)
   A HSL miatt a piros élek száma $\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 5 = 30$. (2 pont)
   A fehér élek feszítőfát alkotnak, tehát pontosan $12 - 1 = 11$ van belőlük. (2 pont)
   Ezért a zöld élek száma $66 - 30 - 11 = 25$. (2 pont)
   Mivel minden zöld él pontosan egy csúcs kifokához járul hozzá, ezért a zöld kifokok összege a zöld élek száma, azaz $25 = 11 \cdot 2 + \delta_Z(v)$, (2 pont)
   ahonnan $\delta_Z(v) = 3$ adódik a v-ből kilépő zöld élek számára. (1 pont)

3. Van-e az alábbi G gráfnak olyan, f gyökérből indított szélességi bejárása, amelyik során ag faél? (Az élekre írt számoktól tekintsünk el.)

   Az órán azt tanították, hogy a BFS után kapott szélességi fa tartalmazza G egy legrövidebb útját az f gyökérből minden más csúcsba. (2 pont)
   Ez azt jelenti, hogy a szélességi fa minden éle két olyan csúcs között fut, amiknek a gyökértől mért távolsága pontosan 1-gyel tér el egymástól. (3 pont)
   Pl. egy konkrét BFS lefuttatásából kiderül, hogy $dist(f, a) = dist(f, g) = 3$. (4 pont)
   Ezért ag sosem lehet f-gyökerű BFS-fa éle. (1 pont)

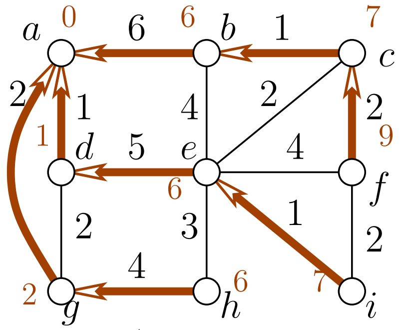
   Ha valaki helyesen lefuttat egy BFS-t az f gyökérből ezen a gráfon, akkor pusztán ezért 2 pontot kaphat.

4. Határozzuk meg az ábrán látható G gráfban a $dist(v, a)$ távolságot G minden $v \neq a$ csúcsára. Lehetséges-e úgy irányítani G gráf éleit, hogy minden $v \neq a$ csúcs esetén legyen olyan irányított út v-ből a-ba, aminek az irányítatlan változata G egy legrövidebb va-útja?
   (Az élekre írt számok az élek hosszait jelentik.)

   Mivel a G-beli élek hosszai nemnegatívok, ezért az a csúcsból futtatva a Dijkstra algoritmust a megadott élhosszokkal, meg tudjuk határozni minden v csúcsra a $dist(v, a)$ távolságot. (1 pont)
   Az alábbi táblázat mutatja a Dijkstra algoritmus futása során az (a, ℓ)-felső becslések alakulását ill. a KÉSZ halmaz bővülését. Az utolsó sorban szereplő végső becslések a keresett $dist(v, a)$ távolságokat adják meg. (6 pont)
   Az órán azt tanították, hogy ha minden gyökértől különböző csúcsra megjelöljük az adott csúcsnál a végső (a, ℓ)-felső becslést beállító élt (az ábrán ezt megtettük barna színnel), akkor az a gyökérből egy legrövidebb utak fáját kapjuk meg: ezen a fán a-t minden más csúccsal a G egy legrövidebb útja köti össze. Ezért ha a barna éleket a barna élek alkotta fán a-felé irányítjuk, akkor a többi él irányításától függetlenül minden v csúcsra lesz a legrövidebb va-utak között egy irányított út is. Ezért a feladat második kérdésére igenlő a válasz. (3 pont)

a	b	c	d	e	f	g	h	i
$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0	6	∞	$\boxed{1}$	∞	∞	2	∞	∞
0	6	∞	1	6	∞	$\boxed{2}$	∞	∞
0	$\boxed{6}$	∞	1	6	∞	2	6	∞
0	6	7	1	$\boxed{6}$	∞	2	6	∞
0	6	7	1	6	10	2	$\boxed{6}$	7
0	6	$\boxed{7}$	1	6	10	2	6	7
0	6	7	1	6	9	2	6	$\boxed{7}$
0	6	7	1	6	$\boxed{9}$	2	6	7

Az is hibátlan érvelés, ha nem részletezett módon megtalálunk egy feszítőfát (pl. az ábrán barnával jelzettet) és arra hivatkozunk, hogy a fán mért (barnával jelzett) távolságok egyrészt felső becslést adnak a legrövidebb utak hosszaira, másrészt pedig ezen az (f, ℓ)-felső becslésen egyetlen élmenti javítás sem tud változtatni. Ezért az a csúcsig mért távolságok pontosan a barna élek fáján mért távolságok, másrészt a barna éleket a felé irányítva megkapjuk, amit keresünk.

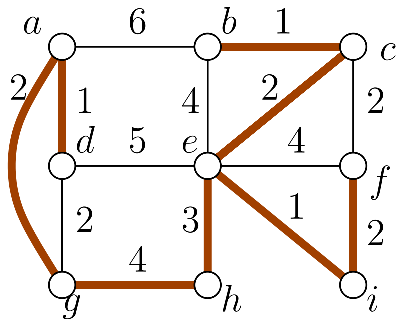


5. Van-e az ábrán látható G gráfnak olyan Hamilton-köre, ami nem tartalmazza az ab élt? (Az élekre írt számoktól tekintsünk el.)

Azt a kérdést kell megválaszolnunk, hogy a $G - ab$ gráfnak van-e Hamilton-köre. (2 pont)
A Hamilton-kör létezésének szükséges feltétele, hogy ha a gráfból k csúcsot törlünk, akkor a kapott részgráf komponenseinek a száma legfeljebb k legyen. (3 pont)
A $G - ab$ gráfból törölve az e csúcsot, két komponens adódik. (4 pont)
Ezért a Hamilton-kör létezésének szükséges feltétele nem teljesül, nincs tehát G-nek olyan Hamilton-köre, ami nem tartalmazza az ab élt. (1 pont)

$\boxed{\star}$ Legfeljebb mennyivel tud növekedni az ábrán látható gráf minimális költségű feszítőfájának költsége akkor, ha a gráf egy tetszőlegesen választott élének költségét tetszőlegesen megváltoztatjuk? (Az élekre írt számok az adott él költségét jelentik.)

Az ábrán látható a G egy Kruskal-algoritmus által megtalált F mkffája. Ehhez az élekről növekvő költség szerint döntöttünk: egy élt pontosan akkor vettünk be F-be, ha nem alkotott kört a korábban bevettekkel. (2 pont)
Ha egy él költségét csökkentjük, akkor az új költségekhez tartozó mkffa költsége nem növekedhet, egy él költségének növelésétől pedig a módosított költségekhez tartozó mkffa költsége nem csökkenhet. Ezért azt kell megállapítanunk, hogy melyik az az él, aminek a költségét végtelenre növelve a módosított költségekhez tartozó mkffa költsége a lehető legnagyobb lesz. (2 pont)



Világos, hogy ha egy, az ábrán látható mkffában nem szereplő él költségét növeljük, akkor az F költsége nem változik, tehát a mkffa költsége sem növekedhet. (1 pont)
Azt kell csupán ellenőrizni, hogy ha az F egyes éleinek költségét ∞-re módosítjuk, hogyan növekszik az új költségekhez tartozó mkffa költsége. (1 pont)
Ha az ad vagy ag élt módosítjuk, akkor dg kerül be a mkffába, a költség tehát nem változik, vagy 1-gyel növekszik. Ha gh vagy he nő meg, akkor de kerül a fába, az összköltség 1-gyel vagy 2-vel nő. Ha ec, ei vagy fi nő ∞-re, akkor cf kerül a fába, a költség tehát ismét nem változik vagy 1-gyel növekszik. Végül, ha bc költsége száll el, akkor eb kerül a fába, azaz 3-mal növekszik a mkffa költsége. (3 pont)
Tehát a feladat kérdésére az a válasz, hogy a mkffa költsége legfeljebb 3-mal tud növekedni egyetlen élköltség megváltozásától. (1 pont)

A Számítástudomány alapjai

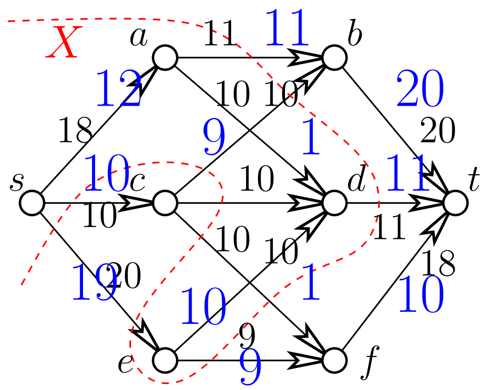
2. pZH javítókulcs (2021. 12. 15.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.
Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Határozzuk meg az ábrán látható G gráf kromatikus számát, és állapítsuk meg, hogy egyetlen él törlésével elérhető-e, hogy a kapott G' gráf kromatikus számára $\chi(G') = \chi(G) - 1$ teljesüljön. (Az élekre írt számoktól és az élek irányításától tekintsünk el.)

   A G gráf két színnel kiszínezhető, azaz páros, a két színosztály pedig $\{s, b, d, f\}$ ill. $\{a, c, e, t\}$. (4 pont)
   Mivel G-nek van éle, ezért 1 szín nem elég a csúcsok színezéséhez, tehát G kromatikus száma $\chi(G) = 2$. (2 pont)
   Ha egyetlen él törlése után a kapott G' gráf kromatikus száma $\chi(G') = \chi(G) - 1 = 2 - 1 = 1$ lesz, az azt jelenti, hogy G' nem tartalmaz élt. (3 pont)
   Mivel G-nek egynél több éle van, ezért bármely él törlése után marad még él, tehát $\chi(G') > 1$ teljesül. A feladat kérdésére a válasz tehát nemleges: bármelyik élt is töröljük, a kromatikus szám ettől nem változik. (1pont)

2. Keressünk az ábrán látható hálózatban maximális nagyságú st-folyamot. Változik-e a maximális folyamnagyság akkor, ha a cd él kapacitását π-vel csökkentjük?

   A javító utas algoritmussal meghatároztuk az ábrán látható 41 nagyságú st-folyamot. Ehhez az $sabt(11)$, $scdt(10)$, $seft(9)$, $sadt(1)$, $sedcbt(9)$ ill. $sedcft(1)$ javításokat végeztük, a zárójelben az adott javítás során küldött folyammennyiség áll. (5 pont)
   A kapott folyamhoz tartozó segédgráfban s-ből az $X = \{s, a, d, e\}$ csúcsok érhetők el javító úton, és ez az X halmaz egy 41 kapacitású st-vágást indukál. Ezért a megtalált 41 nagyságú folyam csakugyan maximális. (3 pont)
   A cd él kapacitásának csökkentésétől a talált f folyam megengedett marad. Ezért a maximális folyamnagyság sem csökkenhet ettől, így a feladat második kérdésére nemleges a válasz. (2 pont)

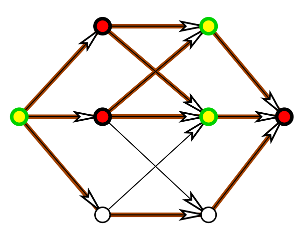
   A folyam maximalitásának igazolásához nem szükséges a folyamalgoritmusra hivatkozni: ha valaki (bárhogy) talál egy 41 nagyságú folyamot, és egy 41 kapacitású vágást, és erre megfelelően hivatkozik, akkor azért jár a pont. (Vagy éppenséggel akkor is, ha világosan kijelenti (és bizonyítja), hogy a 41 nagyságú folyamhoz tartozó segédgráfban már nincs st-út.) Ha azonban csak egy 41 nagyságú folyamra mutat rá a megoldó (amiről nem világos, hogyan keletkezett), és bizonyítékot nem ad a maximalitásra, akkor ez csak minimálisan visz közelebb a megoldáshoz.

3. Tegyük fel, hogy a G páros gráfban $\alpha(G) = 21 = \nu(G)$ teljesül a független pontok ill. a független élek maximális számára. Hány csúcsa van G-nek?

   G páros gráf, ezért nem tartalmaz hurokélt. Gallai I. tétele miatt $\alpha(G) + \tau(G) = |V(G)|$. (4 pont)
   Kőnig tétele szerint minden páros gráfra, így G-re is teljesül, hogy $\nu(G) = \tau(G)$. (4 pont)
   ezért G csúcsainak száma $|V(G)| = \alpha(G) + \tau(G) = \alpha(G) + \nu(G) = 21 + 21 = 42$. (2 pont)

4. Síkbarajzolható-e az ábrán látható G gráf? (Az élekre írt számoktól és az élek irányításától tekintsünk el.)

   Kuratowski tanult tétele szerint G pontosan akkor síkbarajzolható, ha nem tartlamazza részgráfként sem a K_5 sem pedig a $K_{3,3}$ gráf soros bővítését. Ha tehát mutatunk egy ilyen tiltott részgráfot, akkor abból azonnal adódik, hogy G nem síkbarajzolható. (3 pont)
   Az ábra egy G egy olyan részgráfját mutatja, ami $K_{3,3}$ soros bővítése. E tiltott részgráf miatt pedig G nem síkbarajzolható. (7 pont)

5. Hány olyan $1 < m$ egész szám van, amire teljesül a $42 \equiv 4242(m)$ kongruencia?

   A kongruencia definíciója alapján azokat az $m > 1$ egészeket keressük, amire $m \mid 4242 - 42 = 4200$ teljesül. (3 pont)
   Ezek szerint a 4200-nak az 1-nél nagyobb osztói számára vagyunk kíváncsiak. (1 pont)
   A 4200 kanonikus alakja $4200 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$, (2 pont)
   ezért $d(4200) = (3 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (2 + 1) \cdot (1 + 1) = 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 48$ (3 pont)
   Mivel $1 \mid 4200$ is pozitív osztó, ezért a keresett m-ek száma 47. (1 pont)

$\boxed{\star}$ Tegyük fel, hogy a G gráfnak $|V(G)| = 42$ csúcsa van, és kromatikus száma $\chi(G) = 24$. Bizonyítsuk be, hogy G-nek van olyan e éle, amire $\chi(G - e) = 23$.

Tekintsük G egy 24 színnel történő kiszínezését! Ha ebben a színezésben legfeljebb egy olyan színosztály lenne, amelyik csupán egyetlen csúcsot tartalmaz, akkor G csúcsainak száma legalább $2 \cdot 23 + 1 = 47$ volna. Ezért G-nek legalább két olyan színosztálya van, amelyik egyetlen csúcsot tartalmaz. (4 pont)
Legyenek u és v két olyan csúcs, amelyekkel azonos színre egyetlen egy másik csúcsot sem színeztünk a fenti színezésben. Ekkor ha uv nem lenne éle a G gráfnak, akkor v-t átszínehetnénk u színére, és így egy G egy 23 színnel történő színezését kapnánk, ami lehetetlen, hisz $\chi(G) = 24$. Ezek szerint u és v szomszédosak G-ben, legyen $e = uv$. (3 pont)
A fenti gondolatmenet mutatja, hogy $G - e$ 23 színnel kiszínezhető, hisz ha a G 24 színre történő színezésében a v-t átszínezzük u színére, akkor $G - e$ egy 23 színnel történő színezét kapjuk. (1 pont)
Másfelől, ha $G - e$ 22 színnel kiszínezhető lenne, akkor v-t átszínezve egy 23-dik színre a G egy 23 színnel történő színezését kapnánk. Ez $\chi(G) = 24$ miatt lehetetlen. (1 pont)
Ezek szerint $\chi(G - e) = 23$, ami igazolja a feladat állítását. (1 pont)