A Számítástudomány alapjai

1. ZH javítókulcs (2020. 11. 05.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Hányféleképp lehet sorba rendezni az OSZLOPALKAT szóban található 11 betűt úgy, hogy a sorrend ne a LAKATOS szóval kezdődjön? (Az azonos betűket nem különböztetjük meg.)

   Ha nincs kikötés a sorozat kezdetére, akkor ismétléses permutációkat kell számolni: 11 elemből 3 elem kétszer jelenik meg, ezért a lehetséges sorbarendezések száma a tanultak szerint $\frac{11!}{2!^3}$. (4 pont)
   Ezzel leszámoltuk a LAKATOS kezdetű sorozatokat is. Ezek számát úgy kapjuk, hogy a maradék 4 betűt (Z, L, O, P) tetszőlegesen sorba rakjuk a LAKATOS kezdés után. Ezt az említett 4 elem permutációja, tehát 4! van belőlük. (3 pont)
   A válasz tehát a két fenti mennyiség különbsége, (2 pont)
   azaz $\frac{11!}{2!^3} - 4!$. (1 pont)

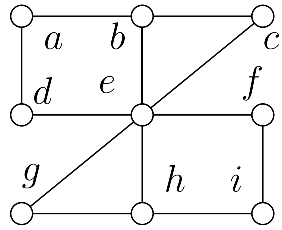
2. A G irányítatlan gráfnak nyolc csúcsa van: a, b, c, d, e, f, g, h. Ezek fokszámai rendre 6, 4, 4, 2, 2, 2, 1, 1. A G éleinek egy alkalmas irányításával létrejövő G' irányított gráfban a fenti csúcsokból rendre $D, 3, 1, 1, 2, 1, 0, 0$ él lép ki. Határozzuk meg D értékét!

   A G gráfban a fokszámösszeg 22, ezért G-nek a HSL miatt pontosan 11 éle van. (4 pont)
   Ha egy irányított gráfban összeadjuk az egyes csúcsokból kilépő élek számát, akkor (a HSL irányított változata miatt) épp a gráf éleinek számát kapjuk. (2 pont)
   Mivel G'-nek is 11 éle van, (1 pont)
   ezért $11 = D + 3 + 1 + 1 + 2 + 1 + 0 + 0$, (2 pont)
   ahonnan $D = 3$ a feladat kérdésére a válasz. (1 pont)

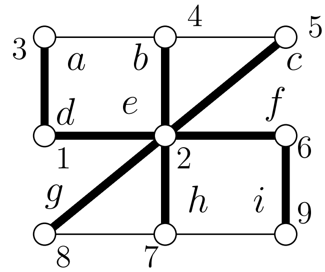
3. Hány csúcsa van az F fának, ha F-nek pontosan két nyolcadadfokú és tizenhárom negyedfokú csúcsa van, és F minden más csúcsa levél?

   Jelölje ℓ az F leveleinek számát! Ekkor F csúcsai száma $|V(F)| = 2 + 13 + \ell = 15 + \ell$, (1 pont)
   F élei száma pedig az órán tanultak szerint ennél 1-gyel kevesebb, azaz $|E(F)| = 14 + \ell$. (2 pont)
   A HSL miatt a fokszámösszeg az élszám kétszerse, azaz $1 \cdot \ell + 4 \cdot 13 + 8 \cdot 2 = 2 \cdot (14 + \ell)$, (4 pont)
   ahonnan $\ell + 68 = 28 + 2\ell$ alapján $\ell = 40$ adódik. (2 pont)
   Innen F csúcsainak száma $|V(F)| = 15 + \ell = 15 + 40 = 55$, és ez a válasz a feladatbeli kérdésre. (1 pont)

4. Indítsunk az ábrán látható G gráf d csúcsából szélességi bejárást és határozzuk meg a hozzá tartozó szélességi fát. Végrehajtható-e a fent említett BFS úgy, hogy bc faél legyen?



   Az órán tanultak szerint végrehajtjuk a szélességi bejárást. Az ábrán az egyes csúcsok mellett látható szám az elérési (és az ezzel azonos befejezési) sorrendet mutatja, a megvastagított élek pedig a faélek: ezek mentén érjük el a korábban elért csúcsból a később elértet. (7 pont)
   Az órán azt is tanították, hogy a BFS fa egy legrövidebb utak fája a gyökérből. Ezért a b és c csúcsok távolsága d-től egyaránt 2. Ha azonban bc faél lenne egy d-ből induló BFS bejárás után, akkor $dist(d, b) \neq dist(d, c)$ lenne, ami nem igaz. Tehát bc nem lehet d-ből indított széességi bejárás után faél. (3 pont)



5. A mellékelt táblázat a Dijkstra algoritmus lefutását mutatja a G irányítatlan gráfon. Az egyes sorok az adott fázis utáni (r, ℓ)-felső becsléseket adják meg. Határozzuk meg, milyen sorrendben kerültek be az egyes csúcsok a KÉSZ halmazba, azaz adjuk meg G csúcsainak az algoritmus által meghatározott $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sorrendjét!

a	b	c	d	e
∞	∞	∞	0	∞
42	24	7	0	∞
33	16	7	0	77
24	16	7	0	18
22	16	7	0	18

Az órán tanultak szerint a KÉSZ halmazba nem tartozó csúcsok közül mindig az a csúcs (vagy azon csúcsok egyike) kerül be a KÉSZ halmazba, amelyikre a legkisebb az (r, ℓ)-felső becslés. (2 pont)
Ezért a táblázat minden becslést tartalmazó sorából ki kell választani a legkisebb elemet azon elemek közül, amiknek az oszlopából még nem választottunk egyetlen elemet sem legkisebbnek. Az így meghatározott elemeket bekereteztük a jobb oldalon látható táblázatban. (6 pont)
Mindezek alapján a G gráf csúcsai d, c, b, e, a sorrendben kerültek be a KÉSZ halmazba. (2 pont)

a	b	c	d	e
∞	∞	∞	$\boxed{0}$	∞
42	24	$\boxed{7}$	0	∞
33	$\boxed{16}$	7	0	77
24	16	7	0	$\boxed{18}$
$\boxed{22}$	16	7	0	18

$\boxed{\star}$ Legyen $G = (V, E)$ véges, irányítatlan gráf. Tegyük fel, hogy a $k : E \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvényre ugyanúgy 14 a minimális költségű feszítőfa költsége, mint a k' költségfüggvényre, ahol $k'(e) = 2k(e) - 1$ a G minden e élére. Mennyi a minimális költségű feszítőfa költsége a $k''(e) = 2k(e) + 1$ képlettel megadott k'' költségfüggvényre?

Az órán azt tanították, hogy a Kruskal-algoritmus outputja minimális költségű feszítőfa. (1 pont)
A Kruskal-algoritmus az élekről a költségek nemcsökkenő sorrendjében, mohón dönti el, hogy beveszi-e az adott élt az outputba vagy sem. (1 pont)
Ha G éleit a k költségfüggvény szerint nemcsökkenő sorrendbe rendezzük, akkor ugyanez a sorrend a k' és a k'' költségfüggvényekre is nemcsökkenő sorrend lesz. (1 pont)
Ezért a Kruskal-algoritmusnak a k költségfüggvényre megtalált outputja minimális költségű feszítőfa lesz a k' és a k'' költségfüggvényekre is. (2 pont)
Legyen F ez az output. Ekkor

$$14 = k'(F) = \sum_{e \in F} k'(e) = \sum_{e \in F} (2k(e) - 1) = \left(\sum_{e \in F} 2k(e) \right) - |F| = 2k(F) - |F| = 28 - |F| \ ,$$

azaz $|F| = 14$. (3 pont)
Ebből viszont

$$k''(F) = \sum_{e \in F} k''(e) = \sum_{e \in F} (2k(e) + 1) = \left(\sum_{e \in F} 2k(e) \right) + |F| = 2k(F) + |F| = 28 + 14 = 42$$

a feladat kérdésére a válasz. (2 pont)

A Számítástudomány alapjai

1. pZH javítókulcs (2020. 12. 16.)

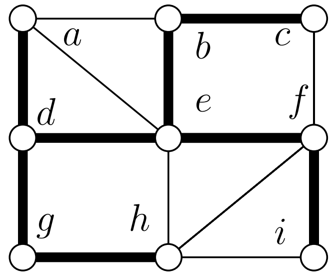
Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Hányféleképp lehet kitölteni 90 ötöslottószelvényt (90 számból 5-re kell tippelni) úgy, hogy ne legyen két azonosan kitöltött szelvény és egyetlen szelvényen se legyen egyetlen találatunk se? (A szelvényeket elég a számhúzás után kitölteni.)

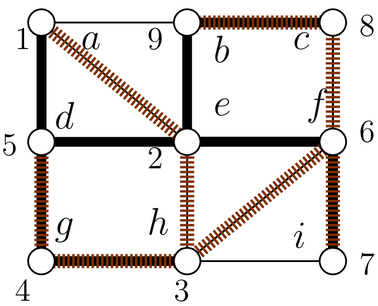
   Ha egy szelvényt úgy akarunk kitölteni, hogy egyetlen találatunk se legyen, akkor a 85 ki nem húzott számból kell 5-re tippelni, (2 pont)
   amit $\binom{85}{5}$-féleképp tehetünk meg. (3 pont)
   Ennyiféle lehetséges szelvényből kell nekünk 90 különbözőt kiválasztanunk, (2 pont)
   amit $\binom{\binom{85}{5}}{90}$-féleképp tehetünk meg. Ez tehát a feladat kérdésére a válasz. (3 pont)

2. Hány levele van a 100-csúcsú F fának, ha F 40 db harmadfokú csúcsán kívül minden más csúcsának legfeljebb 2 a fokszáma?

   Jelölje ℓ az F levelei számát. Ekkor F másodfokú csúcsainak száma $100 - 40 - \ell = 60 - \ell$. (2 pont)
   A fákról tanultak szerint F-nek $|E(F)| = 100 - 1 = 99$ éle van, (3 pont)
   ezért a HSL alapján $3 \cdot 40 + 2 \cdot (60 - \ell) + 1 \cdot \ell = 2 \cdot 99$ adódik, (3 pont)
   ebből $\ell = 42$ pedig következik, ez tehát a válasz a feladat kérdésére. (2 pont)
   Egyébként könnyen látható, hogy van a feladatbeli tulajdonsággal rendelkező fa. (0 pont)



3. Indítsunk a felső ábrán látható G gráf a csúcsából mélységi bejárást és határozzuk meg a hozzá tartozó elérési sorrendet és mélységi fát. Legkevesebb hány élt kell törölni G-ből ahhoz, hogy a vastaggal jelölt élek a törlés után kapott gráf c gyökerű DFS fáját alkothassák?



   Az ábrán látható az órán tanult módon végrehajtott DFS után kapott feszítőfa ill. elérési sorrend. (4 pont)
   Az órán azt is tanították, hogy irányítatlan DFS után nincs keresztél. (2 pont)
   Ezért G-nek minden olyan élét törölni kell a masodik részhez, amelyik a vastaggal jelölt élek alkotta feszítőfa és c gyökér esetén keresztél lesz. (1 pont)

   Konkrétan a hf és hi élekről van szó. (1 pont)
   Könnyen ellenőrizhető, hogy a megvastagított élek a $G - hf - hi$ gráfnak egy c-gyökerű DFS-fáját alkotják. (1 pont)
   Ezért a második kérdésre 2 a válasz. (1 pont)

4. A mellékelt táblázat a Dijkstra algoritmus lefutását mutatja a G irányítatlan gráfon. Az egyes sorok az adott fázis utáni (r, ℓ) felső becsléseket adják meg. Határozzuk meg a ca él $\ell(ca)$ hosszát!

a	b	c	d	e
∞	∞	∞	0	∞
42	24	7	0	∞
33	16	7	0	77
24	16	7	0	18
22	16	7	0	18

A Dijkstra algoritmus futásából adódóan a KÉSZ halmazba $r = d, c, b, e, a$ sorrendben kerülnek be a csúcsok, u.i. az egyes sorokban ezekhez a KÉSZ halmazon kívüli csúcsokhoz tartozik a legkisebb felső becslés. (4 pont)

A c csúcs tehát a második fázisban kerül a KÉSZ halmazba, ezért ekkor próbálunk javítani a ca él mentén. A táblázatból az derül ki, hogy ez sikerült: az a-ra vonatkozó felső becslés 42-ről 33-ra csökkent. (3 pont)

Ezek szerint $33 = D(c) + \ell(ca) = 7 + \ell(ca)$ (itt most kivételesn D jelöli az (r,ℓ)-felső becslést, a d ugyanis egy csúcs neve). (2 pont)

Innen pedig $\ell(ca) = 26$ adódik a keresett élhosszra. (1 pont)

5. Kritikus-e az e tevékenység az alsó ábrán látható PERT problémában?

Elsőként meghatározzuk PERT gráf pontjainak egy topologikus sorrendjét (pl. források megtalálásával és törlésével). Megkapjuk pl az $b, a, c, d, e, g, h, i, f$ sorrendet. (2 pont)

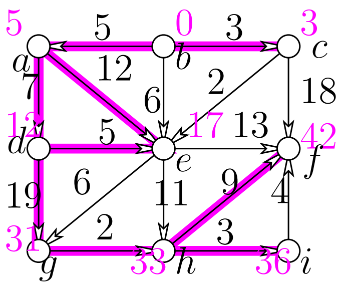
Ebben a sorrendben meghatározzuk az egyes tevékenységek legkorábbi kezdési idejét, és az azt meghatározó, az adott csúcsba futó élt (éleket) megjelöljük. (Az ábrán vastagítással ill. a csúcsok melletti számokkal.) (5 pont)

Ezutan meghatározzuk a kritikus tevékenységeket, azaz mindazon tevékenységeket, melyek kritkus úton vannak. (1 pont)

Kritikus út jelen esetben az olyan irányított bf-út, amely megjelölt élekből áll. (1 pont)

Egyetlen kritikus út van, mégpedig a $badghf$, ezért a kritikus tevékenységek kizárólag ezen út pontjai, azaz b, a, d, g, h, f, ezért az e tevékenység nem kritikus. (1 pont)

A PERT problémában a legrövidebb végrehajtási idő egyébként 42. (0 pont)



$\boxed{\star}$ Tegyük fel, hogy ha az élsúlyokkal ellátott G gráfban az e él költségét 11-nek, ill. 77-nek választjuk, akkor a minimális költségű feszítőfa költsége 1956 ill. 1989 lesz. Mennyi a minimális költségű feszítőfa költsége akkor, ha az e él költsége 42?

Két esetet vizsgálunk. Ha G-nek van olyan mkffája, ami nem tartalmazza az e élt, akkor az e él költségének növelése nincs hatással a mkffa költségére. Ha azonban e éle G minden mkffájának, akkor az e költségét ε-nal növelve a mkffa költsége is ε-nal növekszik, kivéve, ha az így megnövelt költség nagyobb, mint a $G - e$ mkffájának költsége. (5 pont)

A konkrét esetben, ha e költségét 11-ről 66-tal növeljük, akkor a mkffa költsége mindössze tud 43-mal növekedni. Ez azt jelenti, hogy ha a e költsége $x > 11 + 43 = 54$, akkor a mkffa költsége 1989, ha pedig $11 \le x \le 54$, akkor a mkffa költsége $1956 + (x - 11) = 1945 + x$. (4 pont)

Tehát a kérdezett $x = 42$ esetben a mkffa költsége $1945 + 42 = 1987$. (1 pont)