A Számítástudomány alapjai

1. ZH javítókulcs (2019. 11. 07.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Hány olyan sorrendje van az $1, 2, \ldots, 10$ számoknak, amiben az $1, 2$ és 3 ebben a sorrendben állnak, de nem feltétlenül közvetlenül egymás után?

   A leszámlálandó objektumokat generáljuk több lépésben úgy, hogy minden leszámlálandó sorrend pontosan egyféleképp legyen megkapható. (1 pont)
   Először az $1, 2, 3$ számok helyét határozzuk meg, (1 pont)
   amit $\binom{10}{3}$-féleképp tehetünk meg. (2 pont)
   Ezután a $4, 5, \ldots, 10$ számok sorrendjét határozzuk meg, (1 pont)
   amire $7!$ a lehetőségek száma. (2 pont)
   Ez a két döntéssel egyértelműen meghatározza a sorrendet, és minden leszámlálandó sorrend csakugyan egyféleképp áll így elő. (1 pont)
   A két döntésünk egymástól független, ezért a lehetőségek száma pontosan $\binom{10}{3} \cdot 7! = \frac{10!}{3!} = 10 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 4$. (2 pont)

   Avagy:
   Az összes lehetséges sorrend száma $10!$, (2 pont)
   ám ezzel leszámláljuk azokat a sorrendeket is, ahol az $1, 2, 3$ számok nem ebben a sorrendben kovetik egymást. (1 pont)
   Világos egyrészt, hogy e 3 számnak összesen $3!$-féle sorrendje lehet, (1 pont)
   másrészt pedig, hogy e három szám bármely s sorrendjéhez ugyanannyi olyan sorrendje van a 10 számak, ami a három számot az adott s sorrendben tartalmazza. (3 pont)
   Ezért azoknak a sorrendeknek a száma, ahol a három szám a megadott módon követi egymást éppen $\frac{10!}{3!}$. (3 pont)

2. Az F fából töröltük a v csúcsot. Az így kapott gráf egyes csúcsainak fokszámai $1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3$ lettek. Határozzuk meg a törölt v csúcs F-beli fokszámát.

   A törlés után 13 csúcs maradt, így az eredeti gráfnak 14 csúcsa (2 pont)
   és a fákról tanultak szerint 13 éle volt. (2 pont)
   A törlés utáni fokszámösszeg 20, ezért a HSL miatt a törlés utáni gráfnak 10 éle van. (3 pont)
   Mivel az F fának pontosan a v-ből induló élei tűntek el a v csúcs törle után, (1 pont)
   ezért v foka F-ben pontosan $13 - 10 = 3$. (2 pont)
   A teljes megoldáshoz az is hozzátartozik, hogy van olyan F fa, aminek alkalmas csúcsát törölve a feladatbeli fokszámsorozatot kapjuk. Ugyan könnyű ilyet konstruálni (két K_2 és a maradék csúcsokkal egy fa), de ezt nem vesszük szigorúan. (0 pont)
   Avagy:
   A törlés után kapott gráfnak 13 csúcsa és a HSL miatt 10 éle van, (5 pont)
   és mivel körmentes, ezért erdő. (1 pont)
   Az órán azt tanították, hogy egy n csúcsú k komponensű erdőnek $n-k$ éle van, ezért $F-v$ komponensei száma $13 - 10 = 3$. (2 pont)
   A v csúcs pontosan egy éllel kapcsolódik $F - v$ minden komponenséhez, (1 pont)
   ezért $d(v) = 3$. (1 pont)

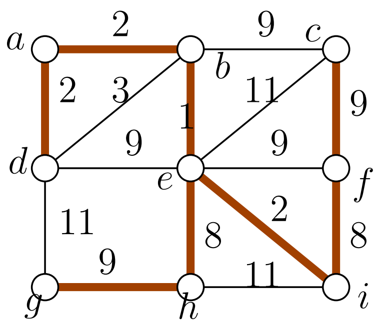
3. A bal oldali ábrán látható G gráf élei mellett az adott él hossza szerepel. Válasszuk ki G néhány élét úgy, hogy a kiválasztott éleken G bármely csúcsából G bármely másik csúcsába el lehessen jutni, és a kiválasztott élek összhossza a lehető legkevesebb legyen.

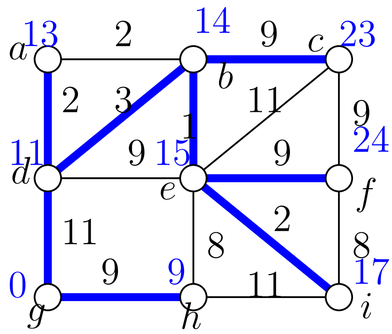
Mivel minden élhossz nemnegatív, ezért az optimális megoldás egy olyan feszítőfája lesz G-nek, amelynek az éleire írt számok összege a lehető legkisebb. (3 pont)
Ilyen feszítőfát az órán tanult Kruskal-algoritmussal tudunk találni, az élekről növekvő hossz szerint eldöntve, hogy bevegyük-e a fába. (2 pont)
Az ábrán megvastagítással jeleztük a Kruskal-algoritmus outputját: ezeket az éleket kell kiválasztanunk a helyes válaszhoz. (5 pont)

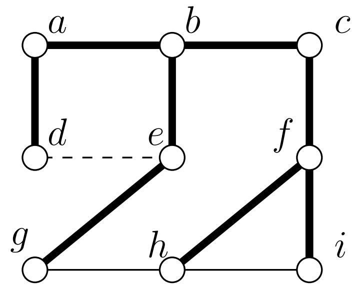
4. A bal oldali ábrán látható G gráf élei mellett az adott él hossza szerepel. Igaz-e, hogy az i csúcs legalább 7-tel távolabb van g-től, mint a d csúcs, azaz, hogy $dist(g,i) \geq dist(g,d)+7$?

A G gráfban $dbei$ egy 6 hosszúságú di-út. (3 pont)
Ezért ha egy legrövidebb gd-útat ezzel a di-úttal kiegészítünk, akkor olyan gi utat kapunk, amelynek hossza $dist(g,d)+6$. (3 pont)
A legrövidebb gi-út ennél nem lehet hosszabb, tehát $dist(g,i) \leq dist(g,d)+6$. (3 pont)
A feladat kérdésére tehát nemleges a válasz. (1 pont)
Avagy.
Az órán tanultak szerint a Dijkstra-algoritmussal meghatározható a G csúcsainak a g csúcstól mért távolsága. (2 pont)
A Dijksra helyes futtatásával megállapítjuk ezeket a távolságokat. (Ld középső ábra) (7 pont)
Levonjuk a következtetést, miszerint nem igaz a kérdezett állítás. (1 pont)

5. A jobb oldali ábrán látható a G gráf egy mélységi fája. Tudjuk, hogy gh és hi a G élei. Lehetnek-e G-ben a d és e csúcsok szomszédosak?







Az órán azt tanították, hogy irányítatlan gráf DFS bejárása után nem keletkezik keresztél. (3 pont)
Azonban a bejárás bárhonnan is indul, ezen élek valamelyike keresztél lesz: a, b, c, f, h ill. i esetén de, d, e ill. g esetén pedig hi. (6 pont)
Ezért a kérdésre nem a válasz: d és e nem lehetnek G-ben szomszédosak. (1 pont)
Avagy:
Az órán azt tanították, hogy irányítatlan gráf DFS bejárása után nem keletkezik keresztél. (3 pont)
Mivel hi nem keresztél, ezért a DFS fa gyökere csak h vagy i lehet. Mivel gh nem keresztél, ezért a gyökér csak g vagy h lehet. (3 pont)
A mélységi bejárás tehát a h csúcsból indult. (1 pont)
Ekkor azonban de keresztél, (2 pont)
ezért a kérdésre nem a válasz: d és e nem lehetnek G-ben szomszédosak. (1 pont)

$\boxed{\star}$ Tegyük fel, hogy F a G olyan feszítőfája, hogy G-nek Euler-sétája, az F éleinek törlésével keletkező $G-F$ gráfnak pedig Euler-körsétája van. Igazoljuk, hogy G-nek van Hamilton-útja.

A $G-F$ gráfnak van Euler-körsétája, ezért $G-F$-ben minden fokszám páros. (2 pont)
Mivel G-nek van Euler-sétája, ezért G-ben legfeljebb 2 páratlan fokú csúcs van. (1 pont)
Mivel az F fának legalább két levele van, (2 pont)
és az F fa minden v levelének a G-beli foka páratlan, (2 pont)
ezért F-nek pontosan két levelének kell lennie. (1 pont)
F tehát G-nek egy kétlevelű feszítőfája, így F-ben minden nem levél csúcs fokszáma 2, F tehát a G egy Hamilton-útja, és nekünk pontosan ennek a létezését kellett igazolnunk. (2 pont)

A levelekkel érvelés csak olyan fákra igaz, amelyeknek legalább két csúcsa van, ezért az állítást az 1 pontú G gráfokra (azaz K_1-re) is ellenőrizni kéne. Ez persze triviális, és nem is vacakolunk ezzel. Nem jár érte pont, de nem is vonunk le semmit, ha ez hianyzik.

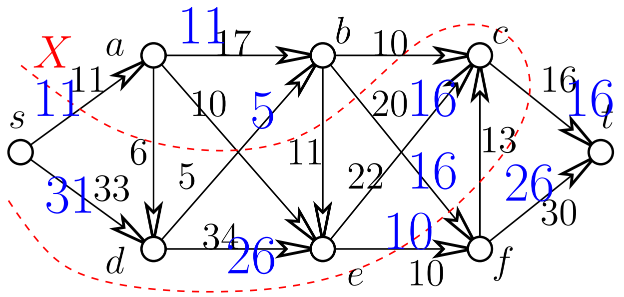
A Számítástudomány alapjai

2. ZH javítókulcs (2019. 12. 05.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Határozzunk meg a felső ábrán látható hálózatban egy maximális nagyságú st-folyamot és igazoljuk a talált folyam maximalitását!

Maximális nagyságú folyamot keresünk az órán tanult Ford-Fulkerson algoritmus segítségével. Az aktuális segédgráf néhány st-útja mentén történő javítások után az ábrán látható, 42 nagyságú f folyamot kapjuk. (A nagyobb méretben (kékkel) szedett számok az f folyam értékét jelzik az adott élen, ha egy e élen nincs ilyen szám, akkor $f(e) = 0$.) (5 pont)

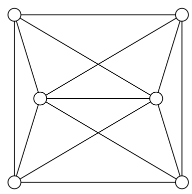


A folyamot egyébként úgy kaptuk, hogy sorra az $sdeft$ (10), $sabct$ (10), $sabft$ (1), $sdect$ (6), $sdbft$ (5), $sdecbft$ (10) utakon javítottunk, zárójelben a javítás során elküldött folyam nagysága áll. (0 pont)

Az f folyamhoz tartozó segédgráfban s-ből elérhető pontok X halmaza által meghatározott st-vágás szintén 42 kapacitású. (4 pont)

Találtunk egy 42 nagyságú folyamot és egy 42 kapacitású st-vágást Ezzel igazoltuk, hogy a megadott hálózatban a maximális folyamnagyság pontosan 42. (1 pont)

(A teljes értékű megoldáshoz nem szükséges, hogy a hallgató megindokolja, hogyan talált 42 nagyságú st-folyamot ill. ugyanilyen kapacitású st-vágást. Ha azonban nincs indoklás, és a vágás vagy a folyam hibás, akkor az nem visz közelebb a megoldáshoz. Ilyenkor csak arra tudunk pontot adni, ha kiderül, hogy a hallgató érti, mi az st-folyam és st-vágás, ill. annak a nagysága ill. kapacitása. Ha szerepel a folyamalgoritmus, de valamit elszámol a hallgató, akkor viszont jár részpontszám. Az is teljes értékű megoldás, ha valaki megtalál egy 42 nagyságú folyamot, helyesen igazolja (de st-vágás nélkül) annak maximalitását; például megmutatja, hogy a segédgráfban nincs javító út és hivatkozik a Ford-Fulkerson-algoritmus azon tulajdonságára, hogy ilyenkor a megtalált folyam maximális nagyságú.)



2. Határozzuk meg az alsó ábrán látható G gráfra az $x = \nu(G)\cdot\alpha(G)\cdot(\tau(G)+\rho(G))$ kifejezés értékét. (ν: ftn élek, α: ftn pontok, τ: lef pontok, ρ: lef élek.)

A G gráfnak nincs hurokéle, így Gallai tétele miatt $\alpha(G) + \tau(G) = |V(G)| = 6$. (2 pont)
A G gráfnak izolált pontja sincs, így Gallai tétele miatt $\nu(G) + \rho(G) = |V(G)| = 6$. (2 pont)
A G gráfban van teljes párosítás (pl a három vízszintes él), ezért $\nu(G) = 3$ (1 pont)
A fentiek miatt ekkor $\rho(G) = 3$. (1 pont)
A G gráfban van kételemű független ponthalmaz, pl a bal felső és a jobb alsó csúcsok alkotnak ilyet. (1 pont)

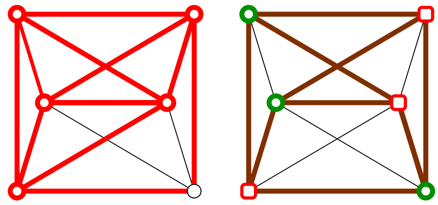
Ha lenne 3 független pont G-ben, akkor ezek bármelyikének a fokszáma legfeljebb 3 lehetne. Mivel G minden csúcsa legalább 4-fokú, ezért G-ben nincs három független csúcs, így $\alpha(G) = 2$. (1 pont)
A Gallai tételből ekkor $\tau(G) = 4$. (1 pont)
A formulába mindezt behelyettesítve $\nu(G) \cdot \alpha(G) \cdot (\tau(G) + \rho(G)) = 3 \cdot 2 \cdot (4 + 3) =$ (1 pont)
$= 42$ a válasz. (0 pont)

Az $\alpha = 2$ megállapítás indokolható úgy is, hogy G lefedhető két klikkel, és egy független ponthalmaz minden klikkből legfeljebb egy csúcsot tartalmaz.

3. A G páros gráf színosztályai A és B. Tegyük fel, hogy G élei pirosra és zöldre vannak színezve, továbbá, hogy a piros élek gráfjában A-ra, a zöld élek gráfjában pedig B-re teljesül a Hall-feltétel. Igazoljuk, hogy G-nek van olyan H feszítő részgráfja, aminek minden komponenese egy piros és zöld éleket felváltva tartalmazó kör.

   Hall tétele szerint ha egy páros gráf valamelyik színosztályára teljesül a Hall-feltétel, akkor e páros gráfnak van az adott színosztályt fedő párosítása. (2 pont)
   Ezek szerint G piros éleiből alkotható olyan M_p párosítás, ami fedi A-t, a zöld élekből pedig egy olyan M_z, ami fedi B-t. (3 pont)
   Mindebből az is következik, hogy a két színosztály mérete megegyezik, azaz M_p és M_z is a G teljes párosításai. (2 pont)
   Ha G-ből tehát töröljük az M_p és M_z egyikéhez sem tartozó éleket, akkor így a G olyan H feszítő részgráfját kapjuk, amiben minden csúcsból pontosan egy piros és pontosan egy zöld él indul. (2 pont)
   Az így kapott H részgráf tehát 2-reguláris, ezért H minden komponense olyan kör, amiben a piros és a zöld élek felváltva követik egymást. Nekünk pedig pontosan ezt kellett igazolnunk. (1 pont)

4. Síkbarajzolható-e az alsó ábrán látható G gráf?
   Az ábra a G gráf egy K_5-tel (ill. egy $K_{3,3}$-mal) izomorf topologikus részgráfját mutatja. (7 pont)
   Se K_5, se $K_{3,3}$ nem síkbarajzolható, ezért G sem az. (3 pont)
   Ha valaki kimondja a Kuratowski-tételt, és látja, egy topologikus $K_{3,3}$-at vagy K_5-öt kellene keresni, az 3 pontot kap.



5. Hány olyan pozitív egész szám van, ami az $n = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7^2$ és $m = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$ egész számok közül pontosan egynek osztója?

   A kérdezett számot úgy kapjuk, hogy az n és m pozitív osztói számából levonjuk az n és m közös osztói számát, majd az így kapott két számot összeadjuk. (2 pont)
   E közös osztók az órán tanultak szerint az (n, m) legnagyobb közös osztó pozitív osztói. (3 pont)
   Az lnko-ra tanultak szerint $(n, m) = 3^2 \cdot 7$. (1 pont)
   A pozitív osztók számát a kanonikus alakból meghatározó, tanult képlet szerint $d(n) = 3 \cdot 4 \cdot 3$, $d(m) = 3 \cdot 3 \cdot 2$ és $d((n, m)) = 3 \cdot 2$, (3 pont)
   ezért a fentiek szerint $3 \cdot 4 \cdot 3 - 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 2 - 3 \cdot 2 =$ (1 pont)
   $= 42$ a válasz. (0 pont)

$\boxed{\star}$ A G gráf csúcsait a diszjunkt A és B halmazok alkotják. Tegyük fel, hogy minden A-beli csúcs pontosan 9 A-beli és 42 B-beli csúccsal, míg minden B-beli csúcs pontosan 20 A-beli és 10 B-beli csúccsal szomszédos. Bizonyítsuk be, hogy G csúcsainak mohó színezéséhez a csúcsok bármely sorrendje esetén kevesebb, mint 42 szín kell.

Minden B-beli csúcs fokszáma $20 + 10 = 30$, így a mohó színezésben az B-beli csúcsok mindegyike az első 31 szín valamelyikét kapja. (4 pont)
Az A-beli csúcsok csupán 9 A-belivel szomszédosak, ezért a mohó színezés során minden A-beli csúcs kiszínezésekor a színezendő csúcsnak legfeljebb 9 olyan korábban kiszínezett szomszédja lehet, amelyik nem az első 31 szín valamelyikét kapta. (3 pont)
Ezért a mohó színezés során minden A-beli csúcshoz az első 41 szín közül tudunk alkalmas színt választani. (2 pont)
Ez pedig azt jelenti, hogy a mohó színezéshez sosem lesz szükség legalább 42 színre. (1 pont)

A Számítástudomány alapjai

1. pZH javítókulcs (2019. 12. 18.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

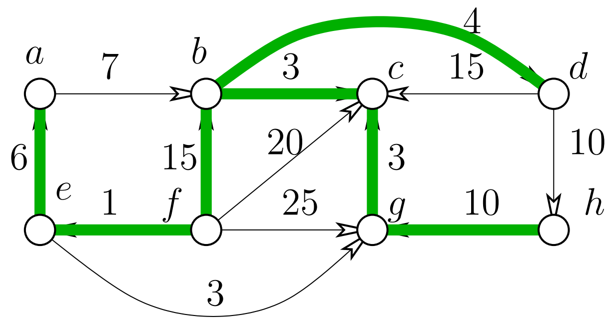
1. Hányféleképp lehet 10 óvodásnak kiosztani 3 piros, 3 fehér és 4 zöld építőkockát, néhány egyforma plüssrépát és plüssbrokkolit úgy, hogy mindenki egy kockát és egy plüsszöldséget kapjon? (Mindkét fajta plüssjószág korlátlan számban áll rendelkezésre.)

   Minden Óvodás a kétféle plüssjószág bármelyikét kaphatja, egymástól függetlenül, ezért a zöldségek kiosztása 2^{10}-féleképp tehető meg. (3 pont)
   A kockák kiosztása a 10 kocka egy ismétléses permutációja, erre a lehetőségek száma $\frac{10!}{3!\cdot 3!\cdot 4!}$. (4 pont)
   A zöldségek és a kockák bármely két kiosztása összepárosítható, (1 pont)
   ezért a lehetséges kiosztások száma a két fenti szám szorzata: $\frac{10!\cdot 2^{10}}{3!\cdot 3!\cdot 4!}$ (2 pont)

2. Tegyük fel, hogy rendre $0, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3$ a G egyszerű gráf csúcsainak fokszámai. Igaz-e, hogy bárhogyan is húzunk be G-be négy további élt, az így kapott gráfban bizonyosan lesz kör?

   A G gráf fokszámösszege 12, ezért a HSL miatt G-nek összesen 6 éle van. (2 pont)
   Ha még 4 élt behúzunk, akkor G-nek összesen 10 éle lesz. (2 pont)
   Ha mindezek után nem jön létre kör, akkor a kapott gráf erdő, (1 pont)
   aminek $n - k$ éle van, ahol n a csúcsok, k pedig a komponensek száma. (2 pont)
   Tekintettel arra, hogy G-nek 9 csúcsa van, és egy 9 csúcsú erdőnek legfeljebb 8 éle lehet, (2 pont)
   ezért a négy él behúzása után bizonyosan keletkezik kör. (1 pont)

3. Legyen G az ábrán látható gráf irányítatlan változata, és jelentsék az egyes éleire írt számok az adott él költségét. Határozzuk meg G egy olyan F feszítőfájának összköltségét, ami tartalmazza a bf élt, és az ilyen feszítőfák körében F éleinek összköltsége a lehető legkisebb.



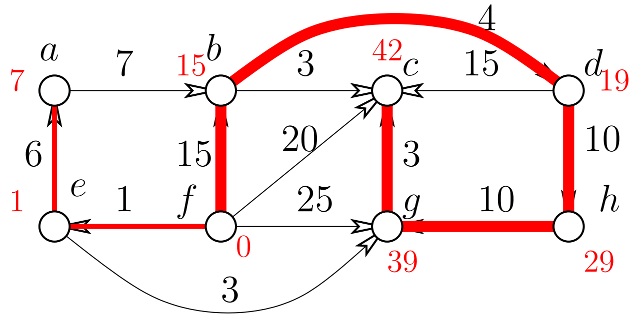
   A bf élt tartalmazó minimális költségű feszítőfák megegyeznek a G gráf minimális költségű feszítőfáival arra a módosított költségfüggvényre nézve, amit úgy kapunk, hogy a bf él költségét 0-ra változtatjuk, a többi él költségét pedig változatlanul hagyjuk. (4 pont)
   Az órán tanult Kruskal algoritmust lefuttatva, azaz e módosított költség szerint növekvő sorrendben döntve az egyes élek bevételéről, az ábrán látható feszítőfát (vagy egy ezzel azonos költségűt) kapunk. (5 pont)
   A kapott feszítőfa éleinek összköltsége 42, ez tehát a feladat kérdésére a válasz. (1 pont)

4. Tekintsük azt a G' irányított gráfot, ami az ábrán látható G gráfból úgy keletkezik, hogy a b csúcsra illeszkedő élek irányítását megfordítjuk. Lesz-e a G' gráfnak visszaéle minden d-ből indított mélységi bejárás után?

Ha a b-re illeszkedő élek irányítását megfordítjuk, akkor $bfgc$ irányított kör lesz. (3 pont)
Tanultuk, hogy egy irányított gráf pontosan akkor aciklikus, ha egyetlen mélységi bejárása után sem keletkezik visszaél. (3 pont)
Ezek szerint a kapott gráf bármely mélységi bejárása során lesz visszaél, így a d csúcsból indított mélységi bejárások mindegyikére is igaz ez. (4 pont)

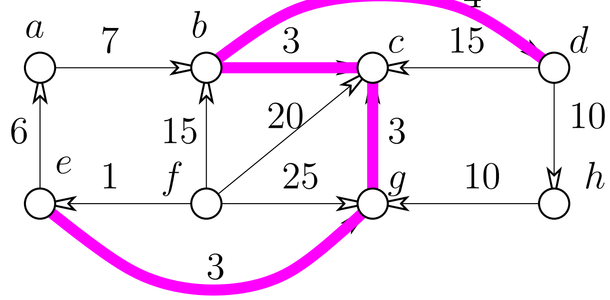
Ha valaki végrehajt a módosított gráfra egy d-ből indíott mélységi bejárást, és megállapítja, hogy van visszaél, az 5 pontot érdemel, hisz nem bizonyította be, hogy a mélységi bejárás még d-ből indítva is többféleképp futhat le, és csak egy ilyenről látta be, hogy visszaélt ad. Ha megpróbálja igazolni, hogy minden lehetséges lefutáskor is ugyanez történik akkor kaphat még egy pontot, és ha meggyőzően érvel, akkor persze a teljes pontszám jár.

5. Határozzuk meg az ábrán látható PERT feladathoz tartozó minimális végrehajtási időt. Kritikus-e az a csúcsnak megfelelő tevékenység?



Az órán tanultak szerint (pl. források egyenkénti törlésével meghatározzuk a megadott gráf csúcsainak egy topologikus sorrendjét. (1 pont)
Konkrétan, f, e, a, b, d, h, g, c egy ilyen sorrend. (2 pont)
Ebben a sorrendben dolgozzuk fel a csúcsokat, és határozzuk meg minegyikhez a legkorábbi kezdési időt. Ugyancsak megjelöljük azokat az éleket, amelyek az egyes csúcsok legkorábbi kezdési időpontjait meghatározzák. (1 pont)
Az ábrán látható értékeket és éleket kaptuk. (4 pont)
A megadott PERT feladthoz tartozo minimális végrehajtási idő tehát 42. (1 pont)
Az egyetlen kritikus út pedig az $fdbhgc$, ezért az a tevékenység nem kritikus, hisz nincs kritikus úton. (1 pont)

$\boxed{\star}$ Legyen G az ábrán látható gráf irányítatlan változata, és jelentsék az egyes éleire írt számok az adott él költségét. Van-e G-nek Euler-sétája? Ha van, akkor határozzuk meg, mennyi a legkisebb összköltsége egy olyan útnak, ami G valamely Euler-sétájának végpontjait köti össze.



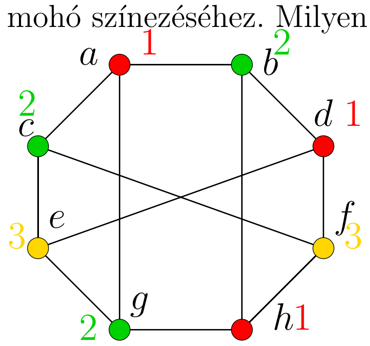
A G gráf (izolált pontotktól eltekintve is) összefüggő, (1 pont)
és az e és d csúcsok páratlan fokúak, míg a többi csúcs foka páros. (1 pont)
Ezért az órán tanult tétel szerint G-nek van Euler-sétája, (2 pont)
és minden ilyen sétának az e és a d csúcsok a végpontjai. (2 pont)
A feladatunk tehát egy e és d között vezető legrövidebb út meghatározása, azzal, hogy az élekre írt számokat élhosszoknak tekintjük. (1 pont)
Dijkstra algoritmusával vagy vmi adhoc érveléssel megmutatjuk, hogy $egbcd$ egy legrövidebb út a két vizsgált csúcs között, (2 pont)
és ennek hossza (azaz a feladatbeli megfogalmazás szerint összköltsége) kivételesen nem 42, hanem csak 13. (1 pont)

A Számítástudomány alapjai

2. ZH javítókulcs (2019. 12. 18.)

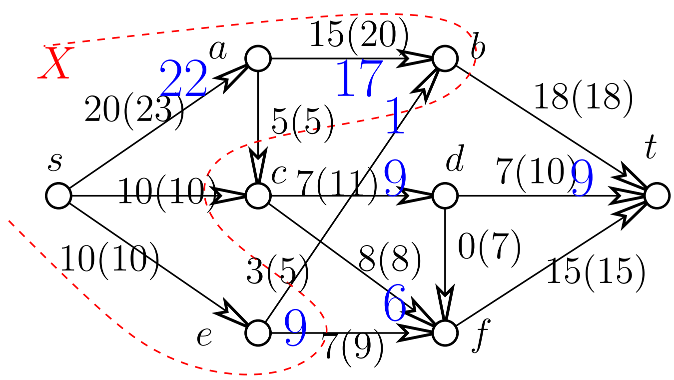
Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Állapítsuk meg, hány szín kell a bal oldali ábrán látható G gráf a, b, c, d, e, f, g, h sorrendben történő mohó színezéséhez. Milyen színt kap ekkor a h csúcs?



Az órán tanult mohó színezés során a soron következő csúcs mindig az első olyan színt kapja, ami különbözik a már korábban kiszínezett szomszédai színétől. (4 pont)
A megadott sorrendben ilyen módon kiszínezve a csúcsokat az ábrán látható színezést kapjuk. (4 pont)
A színezéshez tehát három színre volt szükség, (1 pont)
és a h csúcs az 1-es színt kapja. (1 pont)

2. Maximális nagyságú-e a jobb oldali ábrán látható st-folyam? Ha nem, akkor határozzunk meg egy maximális nagyságú st-folyam nagyságát.



Az ábrán jelzett folyam nem maximális nagyságú, mert a $sabefcdt$ úton további folyam küldhető. (3 pont)
Az ábra az iménti javító úton történő javítás utáni állapotot mutatja: a kékkel írt számok a módosult folyamértékek az egyes éleken. Az így kapott folyam nagysága 42. (3 pont)
A kapott folyamnak megfelelő segédgráfban s-ből elérhető csúcsok halmaza az ábrán jelölt X ponthalmaz. Látnivalóan X egy 42 kapacitású st-vágást indukál. (2 pont)
Ez azt jelenti, hogy a szóban forgó folyam egy maximális nagyságú st-folyam a vizsgált hálózatban, (1 pont)
így a feladat kérdésére 42 a válasz. (1 pont)

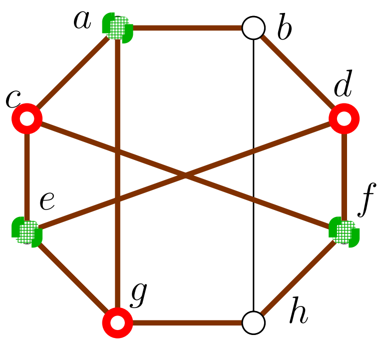
3. Állapítsuk meg a bal oldali ábrán látható G gráf $\nu(G), \rho(G), \alpha(G)$ ill. $\tau(G)$ paramétereit. (ν: ftn élek, α: ftn pontok, τ: lef pontok, ρ: lef élek.)

Mivel G nem tartalmaz hurokélt, (1 pont)
ezért Gallai első tétele miatt $\alpha(G) + \tau(G) = |V(G)| = 8$. (1 pont)

Mivel G nem tartalmaz izolált pontot, (1 pont)
ezért Gallai második tétele miatt $\nu(G) + \rho(G) = |V(G)| = 8$. (1 pont)
Mivel G-nek van teljes párosítása (pl ab, ce, gh, df) ezért $\nu(G) = 4$, (1 pont)
így Gallai második tétele miatt $\rho(G) = 8 - 4 = 4$. (1 pont)
Mivel a, e, h a G független pontjai, ezért $\alpha(G) \geq 3$. (1 pont)
Azonban az $abdfhgec$ körben négy független csúcs csakis a, d, h, e ill. b, f, g, c lehetnek, márpedig a de ill. cf él miatt ezek G-ben nem függetlenek. Ezek szerint $\alpha(G) < 4$, (1 pont)
azaz az előző megfigyelés miatt $\alpha(G) = 3$. (1 pont)
Gallai első tételéből pedig $\tau(G) = 8 - 3 = 5$ adódik. (1 pont)

4. Síkbarajzolható-e a bal oldali ábrán látható G gráf?

Az ábra a G gráf egy $K_{3,3}$-mal topologikusan izomorf részgráfját mutatja. (7 pont)
Mivel $K_{3,3}$ nem síkbarajzolható, ezért G sem az. (3 pont)
Ha valaki kimondja a Kuratowski-tételt, és látja, egy topologikus $K_{3,3}$-at vagy K_5-öt kellene keresni, az 3 pontot kap.



5. Legalább hány pozitív osztója van az n pozitív egésznek, ha n^2-nek pontosan 143 pozitív osztója van?

Legyen $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ az n kanonikus alakja. Ekkor n^2 kanonikus alakja $n = p_1^{2\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{2\alpha_k}$. (2 pont)
Az órán tanultak miatt n^2 pozitív osztóinak száma $143 = d(n^2) = (2\alpha_1 + 1) \cdot \ldots \cdot (2\alpha_k + 1)$. (3 pont)
Mivel 143 kanonikus alakja $143 = 11 \cdot 13$, ezért n^2 kanonikus alakja vagy $n^2 = p^{142}$ vagy $n^2 = p^{10} \cdot q^{12}$. (2 pont)
Innen vagy $n = p^{71}$ vagy $n = p^5 \cdot q^6$, (1 pont)
vagyis vagy $d(n) = 71 + 1 = 72$ vagy $d(n) = (5 + 1) \cdot (6 + 1) = 42$. (1 pont)
A kérdésre a válasz tehát 42 (1 pont)

$\boxed{\star}$ Tegyük fel, hogy a G páros gráf minden A színosztálybeli csúcsának fokszáma 6, míg minden B színosztálybelié 4. Határozzuk meg a G-beli független élek maximális számát, $\nu(G)$-t, ha a B színosztály 63 csúcsból áll.

Mivel G minden élének pontosan egy A-beli és pontosan egy B-beli végpontja van, ezért G élei száma megegyezik az A-beli ill. a B-beli csúcsok fokszámösszegével: $6 \cdot |A| = |E(G)| = 4 \cdot |B| = 4 \cdot 63 = 252$, (2 pont)
ahonnan $|A| = \frac{4 \cdot |B|}{6} = \frac{2 \cdot 63}{3} = 42$. (2 pont)
A G páros gráf, így Kőnig tétele szerint $\nu(G) = \tau(G)$. (2 pont)
Az A színosztály lefogó ponthalmaz, ezért $\tau(G) \leq 42$. (1 pont)
Másrészt ha U egy lefogó ponthalmaz, akkor $252 = |E(G)| \leq \sum_{v \in U} d(v) \leq |U| \cdot \Delta(G) = 6 \cdot |U|$ adódik. (1 pont)
Ezek szerint $|U| \geq \frac{252}{6} = 42$, vagyis $\tau(G) \geq 42$. (1 pont)
Mindezt összevetve $\nu(G) = \tau(G) = 42$ a feladat kérdésére a válasz. (1 pont)

Az első 4 pont után így is folytatható a megoldás:

A maximális párosítás méretére $\nu(G) \leq |A| = 42$ triviálisan teljesül. (1 pont)
Megmutatjuk, hogy van A-t fedő párosítás G-ben. A Hall tétel miatt ehhez csak a Hall-feltétel teljesülését kell A-ra ellenőrizni. (2 pont)
Legyen most $X \subseteq A$. Ekkor ha $E(X)$ jelöli az X-ből induló élek halmazát, akkor $E(X) \subseteq E(N(X))$ miatt $4 \cdot |N(X)| = |E(N(X))| \geq |E(X)| = 6 \cdot |X|$, vagyis $|X| \leq \frac{4}{6}|N(X)| \leq |N(X)|$. (2 pont)
Ezek szerint $\nu(G) \geq |A| = 42$, ahonnan a korábbi megfigyelés miatt $\nu(G) = 42$ adódik. (1 pont)