A Számítástudomány alapjai

1. ZH javítókulcs (2018. 10. 19.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Az $1, 2, \dots, 9$ számokat hányféleképp lehet úgy sorbarendezni, hogy az első 5 szám növekedő, az utolsó 5 szám pedig csökkenő sorrendben álljon?

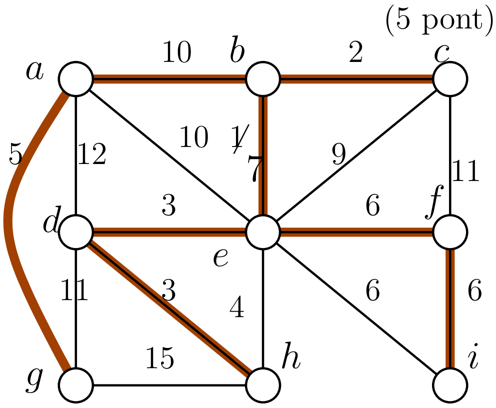
   A feladatban leírt tulajdonságú sorrend 5-dik elemének a sorrendbeli legnagyobb számnak, a 9-nek kell lennie. (2 pont)
   A sorrendbeli első 4 szám tehát az $\{1, 2, \dots, 8\}$ halmazból kerül ki, (2 pont)
   amire $\binom{8}{4}$ lehetőség kínálkozik. (3 pont)
   Figyeljük meg, hogy e $\binom{8}{4}$ lehetőség mindegyikéhez pontosan egy leszámlálandó sorrend tartozik: (1 pont)
   a kiválasztott 4 számot növekvő sorrendbe állítjuk, folyatjuk a 9-essel, majd a maradék 4 szám következik, csökkenő sorrendben. (1 pont)
   A fent említett $\binom{8}{4}$ lehetőség tehát kölcsönösen egyértelműen megfelel az egyes leszámlálandó sorrendektnek, a feladat kérdésére tehát $\binom{8}{4}$ a válasz. (1 pont)

2. Tegyük fel, hogy a 22-élű G gráf élei úgy vannak pirosra és zöldre színezve, hogy mind a piros, mind a zöld élek G egy-egy feszítőfáját alkotják. Hány éle van a $\overline{G}$ komplementergáfnak?

   Mivel minden fának eggyel kevesebb éle van, mint a csúcsai száma, ezért G mindkét feszítőfájának egyenként 11 éle van, (2 pont)
   és G csúcsainak száma pedig pontosan 12. (2 pont)
   A 12 pontú teljes gráf élszáma $\binom{12}{2} = 66$, (4 pont)
   ezért a $\overline{G}$ komplementergráfnak pontosan $66 - 22 = 44$ éle van. (2 pont)

3. Legyen G a bal oldali ábrán látható gráf irányítatlan változata, az élekre írt számok az adott él megépítésének költségét jelentik. Találjuk meg G egy minimális költségű feszítőfáját. Legfeljebb mennyire növelhető a be él megépítési költsége úgy, hogy G-nek legyen egy legfeljebb 42 összköltségű feszítőfája?

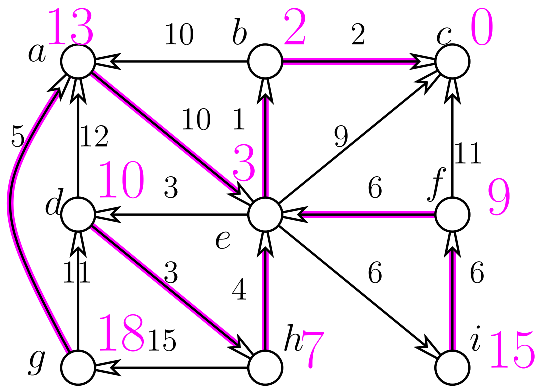
   Az órán tanult Kruskal algoritmus segítségével (az éleket növekvő költség szerint vizsgálva, és megépítve, amennyiben nem hoz létre kört a korábban megépített élekkel) az ábrán megvastagított élekkel megadott minimális költségű feszítőfát kapjuk. (5 pont)
   Ennek összköltsége 36. (1 pont)
   Ha a be él költsége 7-re nő, akkor az iménti feszítőfa költsége 42 lesz, tehát a 7 költség még megengedett. (1 pont)
   Ha azonban a be él költsége 7-nél csak egészen kevéssel több lenne, akkor a Kruskal algoritmus még mindig ugyanezt a fát találná meg, de az összköltség így már meghaladná a 42-t. Tehát ha a be él költsége 7-nél több, akkor a minimális költségű feszítőfa költsége több 42-nél, vagyis nem építhető legfeljebb 42 összköltséggel feszítőfa. (2 pont)
   Ezért a feladat második kérdésére pontosan 7 a válasz. (1 pont)



4. Legyen G a bal oldali ábrán látható irányított gráf, az élekre írt számok az adott él hosszát jelentik. Van-e olyan, a c gyökérbe befelé irányított feszítőfája G-nek, amely minden x csúcsból tartalmazza G egy legrövidebb xc-útját? Ha van ilyen fa, akkor határozzunk is meg egyet.

   Ha megfordítanánk minden él irányítását, akkor az így kapott gráfban keresnénk legrövidebb utat c-ből minden más csúcsba, így a feladat kérdése annak felelne meg, hogy van-e az így konstruált gráfban

egy c-gyökérű legrövidebb utak fája. (2 pont)
A Dijkstra-algoritmusról tanultak szerint – tekintettel arra, hogy nemnegatívak az élhosszok – a Dijkstra algoritmus outputként éppen ilyen fát szolgáltat. (2 pont)
Ezért a feladat első kérdésére igenlő a válasz. (1 pont)
Ilyen konkrét fát pedig úgy tudunk konstruálni, hogy lefuttatjuk Dijkstra algritmusát a megfordított élekkel megadott gráfra a c gyökérből. (1 pont)
Az órán tanult módszerrel ezt megtettük: ennek során a csúcsok $c, b, e, h, f, d, i, a, g$ sorrendben kerültek az U_i (KÉSZ) halmazba, és az egyes csúcsok melleti szám az adott csúcstól adja meg c távolságát. A megvastagított élek pedig azt jelzik, melyik élmenti javítás állította be az él kezdőpontjára a fenti távolságot. Ezen megvastagított élek alkotják a keresett legrövidebb utak fáját. (4 pont)

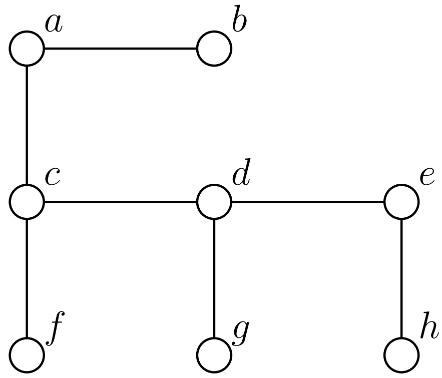


5. Tegyük fel, hogy G egyszerű gráf, és fokszámsorozata $8, 8, 4, 4, 4, 3, 3, 2, 2$. Igazoljuk, hogy G-nek nincs Hamilton-köre.

A kérdezett gráfnak 9 csúcsa van, és ebből két csúcs fokszáma 8, azaz minden más csúccsal össze vannak kötve. (3 pont)
Ha tehát e két csúcsot töröljük a gráfból, akkor az így kapott G' gráf fokszámsorozatára $2, 2, 2, 1, 1, 0, 0$ adódik. (3 pont)
Ez azt jelenti, hogy két izolált pont mellett lesz még legalább egy komponense G'-nek, (1 pont)
azaz G-ből két alkalmas csúcs elhagyásával legalább három komponens keletkezik. (1 pont)
Ezért a Hamilton-kör létezésére tanult szükséges feltétel nem teljesül G-re, így G-nek bizonyosan nincs Hamilton-köre. (2 pont)

$\boxed{\star}$ Legfeljebb hány éle lehet annak az egyszerű G gráfnak, amelynek bármely BFS bejárás után kapott feszítőfája izomorf a jobb oldali ábrán látható gráffal?

A BFS bejárás definíciójából adódóan a BFS bejárás után kapott szélességi fa gyökerének fabeli fokszáma megegyezik a gráfbelivel. (2 pont)
Ezért a G gráfnak nem lehet 3-nál nagyobb fokú csúcsa (2 pont)
Mivel G-nek 8 csúcsa van, ezért a G-beli fokszámösszeg legfeljebb $8 \cdot 3 = 24$, (1 pont)
ezért a handshake lemma miatt $|E(G)| = \frac{1}{2}\sum_{v\in V(G)} d(v) \leq 12$. (1 pont)
Könnyen látható, hogy a kocka csúcsai és élei alkotta gráf bármely szélességi fája izomorf a megadott fával, vagyis van olyan 12-élű, egyszerű gráf, amely megfelel a feladatbeli feltételnek. (3 pont)
A feladat kérdésére a válasz tehát pontosan 12. (1 pont)

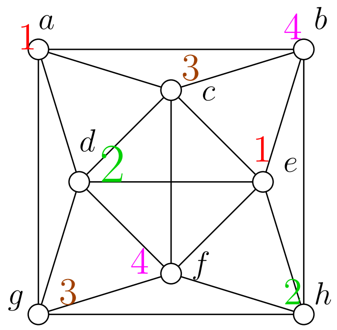


A Számítástudomány alapjai

2. ZH javítókulcs (2018. 11. 23.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Mennyi a bal oldali ábrán látható G gráf $\chi(G)$ kromatikus száma?

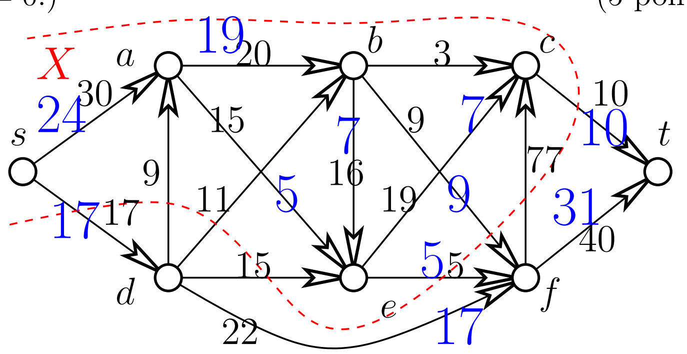


Az órán tanultak miatt $\chi(G) \geq \omega(G)$, azaz a kromatikus számra alsó becslés a maximális klikkméret. (1 pont)
A G gráf „középső” négy csúcsa egy 4-pontú klikket alkot, ezért $4 \leq \omega(G) \leq \chi(G)$, tehát a legalább 4 szín szükséges G színezéséhez. (4 pont)
Az ábrán látható a G gráf egy 4 színnel történő színezése, (3 pont)
azaz $\chi(G) \leq 4$. (1 pont)
Ezt az előző becsléssel összevetve $\chi(G) = 4$ adódik a kromatikus számra. (1 pont)

2. Van-e a jobb oldali ábrán látható hálózatban 42-nél kisebb kapacitású st-vágás?

Maximális nagyságú folyamot keresünk az órán tanult Ford-Fulkerson algoritmus segítségével. Az aktuális segédgráf néhány st-útja mentén történő javítások után az ábrán látható, 41 nagyságú f folyamot kapjuk. (A nagyobb méretben (kékkel) szedett számok az f folyam értékét jelzik az adott élen, ha egy e élen nincs ilyen szám, akkor $f(e) = 0$.) (5 pont)

A folyamot egyébként úgy kaptuk, hogy sorra az $sdft$ (17), $saect$ (10), $sabft$ (9), $saeft$ (5) utakon javítottunk, zárójelben a javítás során elküldött folyam nagysága áll. (0 pont)
Az f folyamhoz tartozó segédgráfban s-ből elérhető pontok X halmaza által meghatározott st-vágás szintén 41 kapacitású. (4 pont)
Azt kaptuk, hogy **létezik** a megadott hálózatban 42-nél kisebb kapacitású st-vágás. (1 pont)



(A teljes értékű megoldáshoz nem szükséges, hogy a hallgató megindokolja, hogyan talált 41 kapacitású st-vágást. Ha azonban nincs indoklás, és a vágás hibás, akkor az nem visz közelebb a megoldáshoz, arra tudunk csak pontot adni, ha kiderül, hogy a hallgató érti, mi az st-vágás, ill. annak a kapacitása. Ha szerepel a folyamalgoritmus, de valamit elszámol a hallgató, akkor viszont jár részpontszám. Az is teljes értékű megoldás, ha valaki megtalálja a 41 nagyságú folyamot, helyesen igazolja (de st-vágás nélkül) annak maximalitását, valamint hivatkozik a Ford-Fulkerson-tételre.)

3. Legyenek A és B a G páros gráf színosztályai. Tegyük fel, hogy $|A| = 100$, $|B| = 200$, $d(a) \geq 70$ minden $a \in A$ és $d(b) \geq 30$ minden $b \in B$ csúcsra. Igazoljuk, hogy G-nek van A-t fedő párosítása.

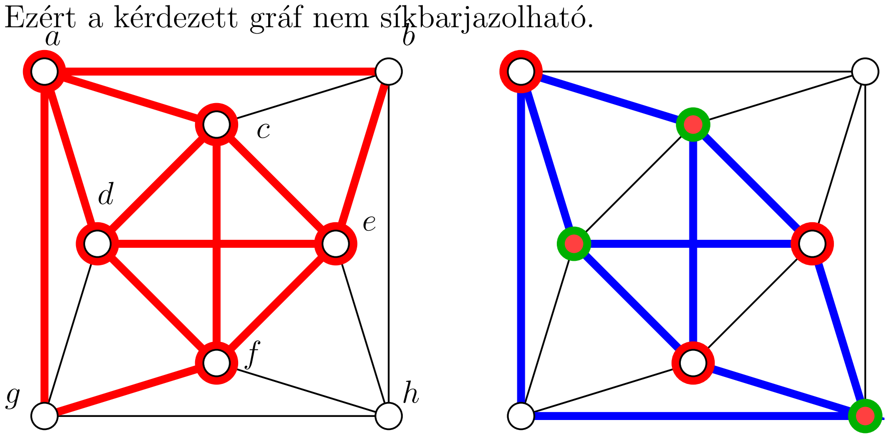
A Hall-tétel szerint pontosan akkor van A-t fedő párosítás, ha A-ra teljesül a Hall-feltétel, azaz ha $|N(X)| \geq |X|$ teljesül az A színosztály minden X részhalmazára. Ezért csupán a Hall-feltétel teljesülését kell ellenőriznünk, és pontosan ezt tesszük a továbbiakban. (2 pont)
Ha $|X| \leq 70$, akkor $|N(X)| \geq d(v) \geq 70 \geq |X|$, ahol v egy X-beli tetszőleges csúcs. A Hall-feltétel tehát fennáll ekkor. (3 pont)
Ha pedig $|X| > 70$, akkor $|A \setminus X| < 30$, ezért mind a 200 db B-beli csúcsnak van X-beli szomszédja, tekintettel arra, hogy minden B-beli fokszám legalább 30. (3 pont)

Ezért $N(X) = B$, azaz $|N(X)| = |B| = 200 \geq |X|$. A Hall-feltétel tehát ismét teljesül, és ezzel a feladat állítását igazoltuk. (2 pont)

(Az $X = \emptyset$ eset ellenőrzése hiányzik a fenti bizonyításból (a Hall-feltétel persze ilyenkor szupertriviális), de ezzel nem piszmogunk, teljes pontszám jár enélkül is.)

4. Síkbarajzolható-e a bal oldali ábrán látható gráf?

A Kuratowski-tétel szerint pontosan akkor síkbarajzolható egy gráf, ha részgráfként nem tartalmazza sem a $K_{3,3}$, sem a K_5 egy felosztását. (2 pont)
A bal oldali ábra egy felosztott K_5, míg a jobb oldali egy felosztott $K_{3,3}$ részgráfot mutat. (Elegendő az egyiket megtalálni.) (7 pont)
Ezért a kérdezett gráf nem síkbarjazolható. (1 pont)



Az első 2 pont megszerezhető azzal az indoklással is, hogy a felosztott K_5 (ill. $K_{3,3}$) nem síkbarajzolható az órán tanultak szerint.

5. Milyen maradékot ad 33-mal osztva az x egész szám, ha 12 az x 5-szörösének 33-as osztási maradéka?

A feladatbeli kérdés az
$5x \equiv 12(33)$ lineáris kongruencia modulo 33 megoldásával ekvivalens (2 pont)
A 7-tel szorzás ekvivalens átalakítás, innen
$35x \equiv 84(33)$ adódik, ami mod 33 áttéréssel
$2x \equiv 18(33)$ alakot ölt. $(2, 33) = 1$ miatt 2-vel osztva nem változik a modulus, így kapjuk a kongruencia
$x \equiv 9(33)$ megoldását. (7 pont)
A feladat kérdésere a válasz tehát, hogy az x egész 33-as osztási maradéka 9. (1 pont)

Aki felírja a lineáris kongruenciát, és a megoldhatóságra vonatkozó tételből levezeti, hogy pontosan egy megoldás van mod 33, az összesen 3 pontot kap. Természetesen más, elméletileg helyes módszerrel (pl az Euklideszi algoritmuson alapulóval) történő helyes megoldás is teljes pontszámot ér.

6. Tegyük fel, hogy a G páros gráf, és tegyük fel továbbá, hogy $\tau(G') = \tau(G)$ teljesül minden olyan G' páros gráfra, amely G-ből egy újabb él behúzásával jön létre. Igazoljuk, hogy G kisebbik színosztályára teljesül a Hall-feltétel.

A Kőnig-tétel miatt minden, a feladatban leírt G' páros gráfra $\tau(G') = \nu(G')$ teljesül, és persze $\tau(G) = \nu(G)$ is igaz. (3 pont)
Ezért a feladatbeli feltétel azt mondja ki, hogy bárhogyan is húzunk be egy újabb élt a gráf páros tulajdonságának megtartásával, a független élek maximális száma (azaz a maximális méretű párosítás mérete) ettől nem növekszik. (2 pont)
Ha G maximális párosítása nem fedné valamelyik színosztályt, akkor be lehetne húzni G-be újabb élt a párosság megtartásával úgy, hogy a maximális párosítás mérete növekedjék. Ám a feltétel miatt ezt nem tudjuk megtenni, ezért valamelyik (értelemszerűen a kisebbik) színosztályt teljes mértékben fedi G bármely maximális párosítása. (2 pont)
A Hall-tétel miatt viszont a kisebbik színosztályt pontosan akkor fedi minden maximális párosítás, ha arra teljesül a Hall-feltétel. (2 pont)
Ez pedig a feladat állítását igazolja. (1 pont)

A Számítástudomány alapjai

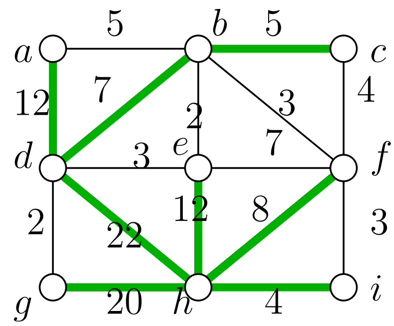
1. pZH javítókulcs (2018. 12. 12.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Tegyük fel, hogy G olyan 9 csúcsú, egyszerű gráf, amelyben a fokszámok $5, 5, 4, 4, 3, 3, 3, 3, 2$. Igazoljuk, hogy G összefüggő.

   Megmutatjuk, hogy G-nek egy komponense van, és ebből következik, hogy G összefüggő. (1 pont)
   Mivel G minden csúcsának legalább 2 a fokszáma, G minden komponense legalább 3 csúcsot tartalmaz. (2 pont)
   G bármely három csúcsa között van legalább harmadfokú, ezért G bármely komponense legalább 4 csúcsot tartalmaz. (2 pont)
   Az 5-fokú csúcsoknak olyan komponensben kell lenniük, amelyben legalább 6 csúcs van. (2 pont)
   A G gráf 9 csúcsát nem lehet legalább két komponensben úgy elhelyezni, hogy mindegyik komponensben legalább 4 csúcs legyen, de legyen egy legalább 6 csúcsú komponens is. (2 pont)
   Ezek szerint G-nek csakugyan egy komponense van, így G összefüggő. (1 pont)

2. Az ábrán látható G gráf minden egyes élének megépítési költsége 6, az élre írt szám pedig azt mutatja, mennyi támogatást kapunk akkor, ha megépül az adott él. Lefeljebb mennyi haszon realizálható, ha megépítjük G egy alkalmasan választott feszítőfájának minden élét?

   Mivel pontosan 8 db élt kell megépíteni, az összköltség fix, egész pontosan 48. A cél tehát a 8 élhez tartozó össztámogatás maximalizálása. (2 pont)
   Ez pedig úgy érhető el, hogy Kruskal algoritmusát a támogatások csökkenő sorrendjében futtatjuk. (4 pont)
   Az algoritmus végrehajtása után az ábrán látható feszítőfát kapjuk. (3 pont)
   A hasznunk pedig az így realizált össztámogatásnál (90-nél) 48-cal kevesebb, azaz pontosan 42. (1 pont)

   Az is tökéletes megoldás, ha az egyes élköltségeket beállítjuk 6 mínusz az élre írt számnak, és az így kapott (néhol negatív) élköltségekre futtatjuk a Kruskalt. A kapott feszítőfa negatív összköltségének (-1)-szerese a válasz, természetesen 42.

3. Az ábrán látható G gráf a csúcsából indított mélységi (DFS) bejárása után hány visszaél keletkezik? Milyen határok közt változik a visszaélek száma, ha G egy másik csúcsából indítjuk a mélységi bejárást? (Irányítatlan esetben a visszaél és az előreél ugyanaz.)

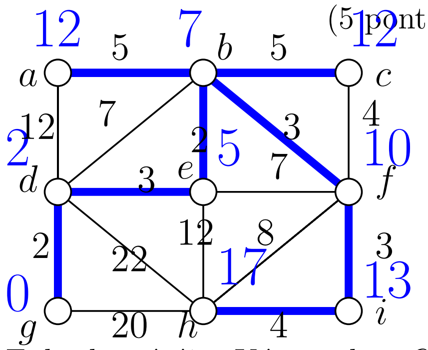
   Az órán azt tanították, hogy irányítatlan gráf DFS bejárásakor nem keletkezik keresztél. (2 pont)
   Ezek szerint G DFS bejárása után csak faélek és visszaélek lesznek, (1 pont)
   faélből pedig pontosan 8 db keletkezik, hiszen azok feszítőfát alkotnak a 9 csúcson. (1 pont)
   Ezért az a-ból indított DFS után pontosan $16 - 8 = 8$ visszaél keletkezik. (2 pont)
   Ez persze ugyanígy igaz akkor is, ha nem a-ból indul a bejárás, tehát a feladat második kérdésére az a válasz, hogy ez a szám mindig pontosan 8. (4 pont)

   Ha valaki helyesen végrehajtja a-ból indulva a DFS-t, és leszámlálja a visszaéleket, de nem nyilatkozik más csúcsokból indított DFS-ről, az 6 pontot érdemel.

4. Az ábrán látható G gráf éleire írt számok az adott él hosszát jelentik. Csökken-e G valamelyik csúcsának g-től számított távolsága akkor, ha a cf él hosszát 1-re csökkentjük?

Az órán tanult Dijkstra-algoritmust alkalmazva, a triviális felső becslésből kiindulva, a legkisebb becsléssel rendelkző csúcsokat egyenként a KÉSZ halmazba pakolva, a KÉSZ halmazba került csúcsból a KÉSZ halmazt elhagyó élek mentén élmenti javításokat végezve kiszámítjuk a g csúcstól minden egyes csúcs távolságát. (1 pont)

Az ábra a kapott legrövidebb utak fáját mutatja, az egyes csúcsok mellett álló szám pedig az adott csúcs g-től mért távolságát jelenti. (5 pont)



A kapott értékek nyilván akkor is felső becslést adnak a csúcsok g-től mért távolságára, ha a cf él hosszát 1-re csökkentjük. Mivel a cf él mentén lehet élmenti javítást végezni a lecsökkentett 1-es élhossz esetén, (2 pont)

ezért az van olyan csúcsa G-nek (konkrétan a c csúcs), amelynek csökken ezáltal a g-től mért távolsága. (2 pont)

Az is helyes megoldás, ha a csökkentés után újabb Dijkstra-t futtatunk, és úgy állapítjuk meg, hogy van változás.

5. Tegyük fel, hogy G olyan 100 csúcsú, egyszerű gráf, amelynek van Euler-körsétája. Képezzük a G' gráfot úgy, hogy G-hez egy v izolált pontot adunk. Van-e a $\overline{G'}$ komplementergáfnak Euler-körsétája?

Az órán tanultak miatt a $\overline{G'}$ gráfnak van Euler-körsétája, ha $\overline{G'}$ összefüggő és minden csúcsának a fokszám páros. (3 pont)

Mivel a $\overline{G'}$ gráf v csúcsa apex (minden más csúccsal szomszédos), ezért $\overline{G'}$ összefüggő. (2 pont)

Tekintettel arra, hogy G-nek van Euler-körsétája, G minden csúcsa páros fokszámú. (1 pont)

Ezért ha u a G egy csúcsa, akkor u fokszáma $\overline{G}$-ben $99-u$, az $\overline{G'}$ gráfban pedig $100-d(u)$, ami páros. (2 pont)

A v csúcs fokszáma $\overline{G'}$-ben pontosan 100, ami szintén páros. (1 pont)

A fent idézett tanulmányaink szerint tehát a $\overline{G'}$ gráfnak van Euler-körsétája. (1 pont)

6. Hány Hamilton-köre van annak a G gráfnak, amelynek 10 piros, 10 fehér és egy zöld csúcsa van, élei pedig a különböző színű csúcsokat kötik össze az összes lehetséges módon?

Legyen z a zöld csúcs. Ha C a G egy Hamilton-köre, akkor $C-v$ a $G-v$ egy Hamilton-útja. Márpedig $G-v$ minden Hamilton útja a piros és fehér csúcsokat felváltva tartalmazza, tehát e Hamilton-út két végpontja ellentétes színű. Ez pedig azt jelenti, hogy G bármely Hamilton-körében a z csúcs szomszédai különböző színűek. (3 pont)

A Hamilton-körök leszámlálásához úgy generáljuk e köröket, hogy z-ből a piros csúcs felé indulva választjuk a kör soron következő csúcsait. (3 pont)

Az első két csúcsot $10-10$-féleképp választhatjuk, a következő kettőt $9-9$-féleképp, sít, függetlenül a korábbi választásainktól. (2 pont)

Mivel minden egyes Hamilton-kört pontosan egyféleképp generál ez a módszer, G Hamilton-köreinek száma e választási lehetőségszámok szorzata lesz, azaz $10 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot 1 = 10!^2$. (2 pont)

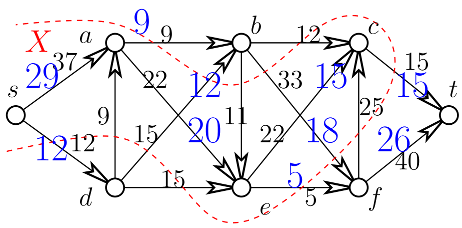
A Számítástudomány alapjai

2. pZH javítókulcs (2018. 12. 12.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Határozzunk meg egy maximális nagyságú st-folyamot az ábrán látható hálózatban.

Maximális nagyságú folyamot keresünk az órán tanult Ford-Fulkerson algoritmus segítségével. Az aktuális segédgráf néhány st-útja mentén történő javítások után az ábrán látható, 41 nagyságú f folyamot kapjuk. (A nagyobb méretben (kékkel) szedett számok az f folyam értékét jelzik az adott élen, ha egy e élen nincs ilyen szám, akkor $f(e) = 0$.) (4 pont)
A folyamot egyébként úgy kaptuk, hogy sorra az $sabct$ (9), $sdeft$ (5), $sdbft$ (7), $saect$ (6), $saedbft$ (5), $sdaecbft$ (9) utakon javítottunk, zárójelben a javítás során elküldött folyam nagysága áll. (0 pont)

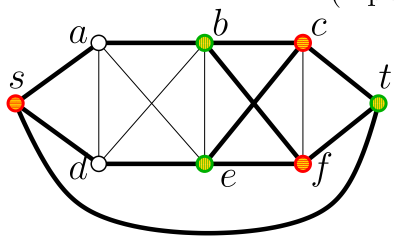


Az f folyamhoz tartozó segédgráfban s-ből elérhető pontok X halmaza által meghatározott st-vágás szintén 41 kapacitású. (4 pont)
Mivel a hálózatban létezik 41 nagyságú folyam és 41 kapacitású st-vágás, ezért a maximális folyamnagyság pontosan 41. (2 pont)

(A teljes értékű megoldáshoz nem szükséges, hogy a hallgató megindokolja, hogyan talált 41 nagyságú st-folyamot ill. ugyanekkora kapacitású st-vágást. Ha azonban valamelyik ezek közül hibás, akkor nincs megindokolva az optimalitás. Ha szerepel a folyamalgoritmus, de valamit elszámol a hallgató, akkor viszont egyértelműen jár részpontszám.)

2. Síkbarajzolható marad-e az ábrán látható gráf irányítatlan változata az st él behúzása után?

Az ábrán a G gráf egy $K_{3,3}$-mal izomorf részgráfja látható. (8 pont)
Mivel a $K_{3,3}$ nem síkbarajzolható, ezért G sem az. (2 pont)



A Kuratowski-tételre történő helyes hivatkozás, amennyiben a hallgató nem talál tiltott részgráfot, 2 pontot ér. Az is tökéletes megoldás, ha valaki hivatkozik a K_5 nem síkbarajzolható tulajdonságára és arra, hogy az élösszehúzás megőrzi a síkbarajzolhatóságot, valamint észreveszi, hogy az st élt összhúzva lesz a gráfban topologikus K_5.

3. Igazoljuk, hogy ha F egy 100 csúcsú fa, akkor az F-beli független ponthalmazok maximális méretére $\alpha(F) \geq 50$ teljesül.

Az F fa páros gráf, (3 pont)
ezért csúcsai két színnel színezhetők. (2 pont)
Ezért valamelyik színosztály legalább 50-et tartalmaz az F fa 100 csúcsából, (2 pont)
és ezen pontok független ponthalmazt alkotnak. (1 pont)
A független ponthalmaz maximális méretére tehát $\alpha(F) \geq 50$ teljesül, nekünk pedig pontosan ezt kellett igazolni. (2 pont)

4. Melyek azok az 1 és 100 közé eső pozitív egészek, amelyek 42-szerese 66-ra végződik?

Legyen x ilyen szám. A feladatbeli tulajdonság azzal egyenértékű, hogy $42x \equiv 66(100)$. (2 pont)
Ezt a lineáris kongruenciát oldjuk meg. 6-tal osztás után $7x \equiv 11(50)$ adódik, (3 pont)

A 7-tel szorzás ekvivalens átalakítás, amiből $49x \equiv 77(50)$ adódik, (2 pont)
amit $-x \equiv -23(50)$ alakba írhatunk. (1 pont)
A kongruencia megoldása tehát az $x \equiv 23(50)$, (1 pont)
és az $1 \leq x \leq 100$ feltételt figyelembe véve pontosan két egész szám adódik megoldásnak: az $x = 23$ és az $x = 73$. (1 pont)

5. Hány olyan $m > 1$ egész szám létezik, amelyre a $7x \equiv 7(m)$ kongruenciának megoldása az $x = 7$?

   A konguencia definíciója szerint pontosan akkor megoldás az $x = 7$, ha $m \mid 7 \cdot 7 - 7 = 42$ teljesül. (4 pont)
   Ez azt jelenti, hogy a válasz a 42 1-nél nagyobb osztói száma. (2 pont)
   Mivel $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$, ezért az órán tanultak szerint $d(42) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ a 42 pozitív osztói száma. (2 pont)
   ezek közül csak az 1-nél nagyobbak érdekelnek minket, (1 pont)
   így $1 \mid 42$, miatt a keresett m-ek száma éppen $8 - 1 = 7$. (1 pont)

6. Tegyük fel, hogy G minden csúcsa úgy van kiszínezve a piros és zöld színek valamelyikére, hogy G-nek nincs olyan páratlan hosszúságú köre, amelynek csúcsai egyszínűek. Igazoljuk, hogy G kromatikus számára $\chi(G) \leq 4$ teljesül.

   Mivel az azonos színűre színezett csúcsok nem alkotnak páratlan kört, ezért a piros csúcsok is és a zöld csúcsok is páros gráfot feszítenek G-ben. (4 pont)
   Ezek szerint az eredetileg piros csúcsokat ki lehet színezni két színnel (mondjuk tulipirossal és karmazsinnal) úgy, hogy egyetlen élnek se legyen mindkét végpontja tulipiros vagy karmazsin. (3 pont)
   Hasonlóan, az eredetileg zöldre színezett csúcsok kiszínezhetők a keki és libazöld színekre úgy, hogy egyetlen élnek se legyen azonos zöld árnyalatú a két végpontja. (1 pont)
   Mivel a G gráf csúcsait a fentiek szerint 4 színnel színeztük úgy, hogy minden él különböző színű csúcsokat köt össze, ezért G kromatikus számára $\chi(G) \leq 4$ teljesül. (2 pont)