A Számítástudomány alapjai

1. ZH javítókulcs (2017. 10. 26.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Az osztályba járó 15 fiú és 15 lány közül hányféleképp választható olyan 10 fős küldöttség, amelyikben legalább két lány és legalább két fiú van?
(A végeredményt nem szükséges kiszámolni, elég egy zárt alakot megadni.)

   Az 30 tanulója közül pontosan $\binom{30}{10}$-féleképp válaszható ki egy 10-tagú küldöttség. (3 pont)
   Ezek között azonban lesznek olyanok is, amelyek nem teljesírik a feladatbeli elvárást, (1 pont)
   konkrétan azok, amelyek 0 vagy 1 fiút, ill. azok, amelyek 0 vagy 1 lányt tartalmaznak. (1 pont)
   A 0 fiút ill. 0 lányt tartalmazó 10-esek száma egyaránt $\binom{15}{10}$, (1 pont)
   az 1 fiút ill. az 1 lányt tartalmazó 10-esek száma pedig $\binom{15}{1} \cdot \binom{15}{9}$ (2 pont)
   A válasz tehát $\binom{30}{10} - 2 \cdot \binom{15}{10} - 2 \cdot \binom{15}{1} \cdot \binom{15}{9}$. (2 pont)
   Helyes indoklással elfogadható az a válasz is, ha összeszámoljuk, $2 \leq i \leq 8$ esetén az i fiút és $10-i$ lányt tartalmazó küldöttségeket: $\sum_{i=2}^{8} \binom{15}{i} \cdot \binom{15}{10-i}$, hiszen mivel 7 tagot adunk össze, ez zárt alaknak tekinthető.

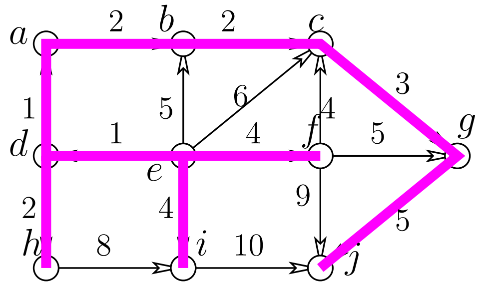
2. A G gráfról tudjuk, hogy egyszerű, 10 csúcsa van, és ebből 9 csúcs fokszáma pontosan 5. Igazoljuk, hogy G összefüggő.

   Azt kell igazolni, hogy G bármely két csúcsa között van út G-ben. (1 pont)
   Mivel összesen 10 csúcs van, ha két 5-ödfokú csúcs nem szomszédos, akkor kell lennie a 8 maradék csúcs között kell lennie (legalább 2) közös szomszédjuknak. (4 pont)
   A 10-dik csúcs biztosan nem izolált pont, hiszen ekkor G csúcsainak fokszámösszege (azaz az élek számának kétszerese) páratlan volna. (3 pont)
   Tehát e 10-dik csúcsnak van 5-ödfokú szomszédja, ezért ebbe a szomszédba, és minden más csúcsba is vezet ebből a csúcsból út. (2 pont)
   Azt kaptuk, hogy bármely két csúcs között vezet út G-ben, tehát G csakugyan összefüggő. (1 pont)
   Érvelhetünk másképp is.
   Azt kell igazolnunk, hogy G-nek csak egy komponense van. (2 pont)
   Minden 5-ödfokú csúcs olyan komponensben található, amelyben a szomszédai is benne vannak, tehát minden 5-ödfokú csúcsot egy-egy, legalább 6-pontú komponens tartalmazza. (2 pont)
   Tekintettel arra, hogy egy 10-csúcsú gráfnak nem lehet két különböző, legalább 6 csúcsot tartalmazó komponense, ezért minden 5-ödfokú csúcs ugyanahhoz a komponenshez tartozik. (2 pont)
   Ahogy fent is láttuk, a 10-dik csúcs nem lehet 0-adfokú (azaz izolált pont). (3 pont)
   Így a 10-dik csúcs is 5-ödfokú csúcsokkal közös komonensben van, G csakugyan összefüggő. (1 pont)

3. Az ábrán látható G gráf éleire írt számok az adott él költségét jelentik, az élek irányításától tekintsünk el. Legyen G' az a gráf, ami G-ből keletkezik az ej él behúzásával. Legfeljebb mennyinek választható az ej él költsége ahhoz, hogy legyen G'-nek olyan minimális költségű feszítőfája, ami tartalmazza az ej élt?

   Az órán tanult Kruskal algoritmus segítségével, az egyes élek megépítéséről növekvő költség szerinti sorrednben döntve meghatározzuk a G minimális költségű feszítőfáját. (3 pont)
   Az ábrán a megvastagított élek mutatnak egy ilyen módon konstruált F feszítőfát. (3 pont)
   Az F ej útján gj költsége 5, ezért ha az ej nem drágább 5-nél, akkor $F - gj + ej$ egy F-nél nem drágább feszítőfa, tehát ej lesz olyan minimális költségű feszítőfa, ami ej élt tartalmazza. (2 pont)

Ha azonban ej drágább 5-nél, és lenne olyan minimális költségű F^* feszítőfa, ami ej-t tartalmazza, akkor a most megtalált F feszítőfa ej útjának valamelyik uv éle az $F^* - ej$ két komponense között futna. Mivel az uv él költsége legfeljebb 5, ezért $F^* - ej + uv$ egy F^*-nál olcsóbb feszítőfa lenne, ami ellentmondás. (1 pont)
A válasz tehát 5. (1 pont)

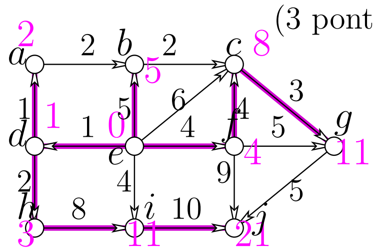


4. Legfeljebb hány keresztél keletkezik az ábrán látható G gráf irányítatlan változatának e gyökérből indított BFS bejárása után?

Az órán azt tanították, hogy a BFS után a gráfban nincs szintet ugró él, így előreél sincs. (2 pont)
Mivel irányítatlan gráf esetén az előreél és a visszaél ugyanazt azélt jelenti, (1 pont)
a BFS után csak faélek ill. keresztélek lesznek. (1 pont)
A G gráf összefüggő,ezért a faélek feszítőfát alkotnak,tehát pontosan 9 faél lesz. (1+1+1 pont)
A G gráfnak pontosan 16 éle van, (1 pont)
ezért a keresztélek száma minden BFS bejárás után pontosan $16 - 9 = 7$ lesz, (1 pont)
ez tehát a kérdezett maximum is. (1 pont)
Aki figyelmetlenül olvas, és irányított gráffal dolgozik, attól ezért ne vonjunk le pontot, de várjuk el, hogy (1-1 pontért) rámutasson, hogy G aciklikus, ezért nem lesz visszaél, valamint e-ből minden csúcs elérhető, ezért a faélek egy megirányított feszítőfát alkotnak.
Aki pusztán egy BFS-t hajt végre, és megszámolja a keresztéleket, az 5 pontot kap, hiszen nem bizonyítja, hogy a kapott érték egyúttal a maximum is.

5. Az ábrán látható G gráf egyes éleire írt számok azt jelentik, hogy hány kincset tudunk összegyűjteni az adott élen. Határozzuk meg, mennyi az összesen összegyűjthető kincsek száma, ha a gráf tetszőleges pontjából indulhatunk, de csak irányított élek mentén haladhatunk.

A G gráf aciklikus, ami pl. az $e, d, a, b, h, i, f, c, g, j$ topologikus sorrendből látszik. (2 pont)
Ezért a kincsvadászat során bizonyosan G egy utját járjuk be, tehát nekünk a G leghosszabb útját kell meghatároznunk, ahol az élekre írt számokat az adott él hosszának értelmezzük. (1 pont)
Erre az órán tanult PERT módszert alkalmazva a fenti topologikus sorrendben meghatározzuk minden v csúcsra, hogy mennyi a v-be vezető leghosszabb út hossza. (3 pont)



Az ábrán az egyes csúcsokra írt számok a fenti módon kiszámított értékeket adják meg, a megvastagított élek az ezen értékeket meghatározó éleket jelölik. (3 pont)
Az összegyűjthető kincsek maximális száma tehát 21, (1 pont)
és ehhez az $edhij$ utat kell bejárnunk. (0 pont)

Nem muszáj leghosszabb utakra hivatkozni, lehet közvetlenül indokolni azt is, hogy a megfelelő PERT problémában a legkorábbi kezdési idők adják a kérdéses számokat. Aki rámutat a leghosszabb út problémára, megemlíti, hogy ez az élhosszok előjelcseréjével legrövidebb út problémára vezet, majd a konzervatív élsúlyozásra hivatkozva a Ford vagy Floyd valamelyikének alkalmazását javasolja, az 7 pontot kap, ha nem alkalmazza magát az algoritmust.

$\boxed{\star}$ Legyenek a G gráf csúcsai azok az (a_1, a_2, a_3) sorozatok, ahol $a_i \in \{0, 1, 2\}$ teljesül minden $1 \le i \le 3$ esetén. Két csúcs pedig pontosan akkor szomszédos, ha a csúcsoknak megfelelő két sorozat pontosan két helyen tér el egymástól. Van-e Hamilton-köre a $\overline{G}$ komplementergráfnak?

A G gráf csúcsainak száma a 3-hosszúságú 1/2/3-sorozatok száma, ami $3^3 = 27$. (2 pont)
Bármely G-beli csúcs fokszáma annyi, ahányféleképp kiválaszthatunk két helyet a sorozatban, és az ottani számokat megváltoztathatjuk. (1 pont)
A fokszám tehát $\binom{3}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 3 \cdot 4 = 12$. (2 pont)
A $\overline{G}$ komplementergráfban tehát a csúcsok fokszáma pontosan $27 - 1 - 12 = 14$. (1 pont)
Az órán tanult Dirac-tétel szerint ha egy egyszerű gráfban minden csúcs fokszáma legalább a csúcsok számának a fele, akkor a gráfban van Hamilton-kör. (3 pont)
Mivel $14 \ge \frac{27}{2}$, ezért a konkrét G gráfra teljesül a fenti Dirac-feltétel, így a Dirac-tétel miatt $\overline{G}$-nek van Hamilton-köre. (1 pont)

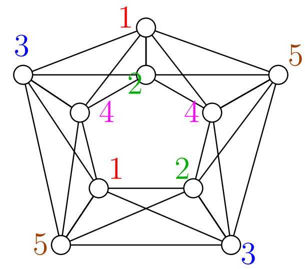
A Számítástudomány alapjai

2. ZH javítókulcs (2017. 11. 30.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Mennyi a kromatikus száma a felső ábrán látható gráfnak?

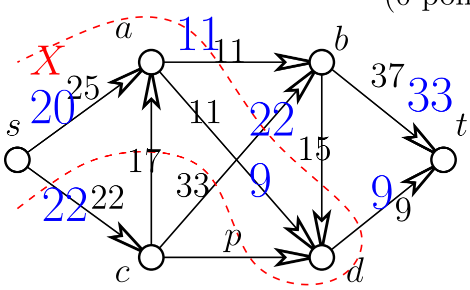
   A kromatikus számról tanultak alapján $\chi(G) \geq \omega(G) \geq 4$, hisz G-ben van 4 méretű klikk. (3 pont)
   Ha azonban G-t 4 színnel próbáljuk kiszínezni, akkor a sugárirányú élek csúcsait felváltva ugyanazzal színpárral színezzük, így 4 színnel nem lehetséges a színezés. Ezért $\chi(G) \geq 5$. (3 pont)
   Az ábrán látható G csúcsainak egy 5 színnel történő színezése, ennek alapján tehát G 5-színezhető, így $\chi(G) \leq 5$ (3 pont)
   A két eredmény összevetéséből $\chi(G) = 5$ adódik. (1 pont)



2. Mennyi $p = 0$ esetén az alsó ábrán látható hálózatban a maximális nagyságú st-folyam nagysága? Ha $p > 0$, akkor hogyan függ a maximális nagyságú st-folyam nagysága p-től?

   Maximális nagyságú folyamot keresünk az órán tanult Ford-Fulkerson algoritmus segítségével úgy, hogy $p = 0$-val dolgozunk. Az aktuális segédgráf néhány st-útja mentén történő javítások után az ábrán látható, 42 nagyságú f folyamot kapjuk. (A nagyobb méretben (kékkel) szedett számok az f folyam értékét jelzik az adott élen, ha egy e élen nincs ilyen szám, akkor $f(e) = 0$.) (4 pont)
   A folyamot egyébként úgy kaptuk, hogy sorra az $sabt$ (11), $sadt$ (9), $scdt$ (22) utakon javítottunk, zárójelben a javítás során elküldött folyam nagysága áll. (0 pont)

   Az f folyamhoz tartozó segédgráfban s-ből elérhető pontok X halmaza által meghatározott st-vágás szintén 42 kapacitású, p-től függetlenül. (4 pont)
   Mivel a hálózatban $p = 0$-ra létezik 42 nagyságú folyam és tetszőleges p esetén létezik 42 kapacitású st-vágás, ezért a maximális folyamnagyság a p paraméter értékétől függetlenül mindig 42. (2 pont)



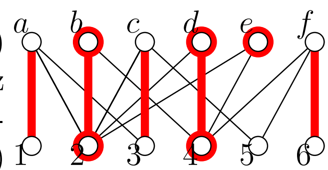
   (A teljes értékű megoldáshoz nem szükséges, hogy a hallgató megindokolja, hogyan talált 42 nagyságú st-folyamot ill. ugyanekkora kapacitású st-vágást. Ha azonban valamelyik ezek közül hibás, akkor nincs megindokolva az optimalitás. Ha szerepel a folyamalgoritmus, de valamit elszámol a hallgató, akkor viszont egyértelműen jár részpontszám.)

3. Legyenek a G páros gráf színosztályai $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ ill. $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, élei pedig $a1$, $a2$, $a3$, $b2$, $b4$, $c2$, $c3$, $c5$, $d2$, $d4$, $e2$, $e4$, $f4$, $f5$, $f6$. Teljesül-e az A színosztályra a Hall-feltétel?

   Ha $X = \{b, d, e\}$, akkor $N(X) = \{2, 4\}$, (6 pont)
   tehát $|X| > |N(X)|$ teljesül az A színosztály X részhalmazára. (3 pont)
   Ezért az A színosztályr nem teljesül a Hall-feltétel. (1 pont)

   Természetesen nem szükséges megindokolni, hogyan találta a hallgató a Hall-feltételt sértő X halmazt. Ettől még jár részpontszám azért, ha az órán tanult módon keresi ezt meg.

   Az ábrán látható a G gráf egy diagramja. (1 pont)
   Az alternáló utas algoritmussal dolgozunk. Kiindulunk (mondjuk) az $a1, b2, c3, d4, f6$ párosításból és fedetlen csúcsokban végződő alternáló utat keresünk. (4 pont)
   Az e csúcsból alternáló úton elérhető csúcsokat az ábrán megjelöltük. (2 pont)



Mivel az 5 csúcs nem érhető el alternáló úton, a kiindulási párosítás maximális, (0 pont)
és az A színosztályban elérhető csúcsok X halmaza megsérti a Hall-feltételt. (3 pont)

4. Legfeljebb hány tartománya lehet egy 20-csúcsú, síkbarajzolt G gráfnak, ha G minden tartományát legalább 5 él határolja?

   G-re érvényes az Euler-féle poliéderformula órán tanult általánosítása, azaz $n + t = e + k + 1$, ahol $n = 20$ a csúcsok, t a tartományok, e az élek, k pedig a G-beli komponensek számát jelöli. (2 pont)
   Azt is tudjuk, hogy $2e = \sum \ell_i$, ahol ℓ_i az i-dik lapot határoló élek száma. (2 pont)
   Mivel minden lapot legalább 5 él határol, ezért $2e = \sum \ell_i \geq 5t$ teljesül. (2 pont)
   Innen $2n + 2t = 2e + 2 + 2k \geq 5t + 2 + 2k$ miatt $3t \leq 2n - 2 - 2k \leq 2n - 4 = 36$, azaz $t \leq 12$ adódik. (2 pont)
   Ráadásul ez a lapszám elérhető: pl a dodekaéder élgráfjának szokásos síkbarajzolásának 20 csúcsa és 12 lapja van, miközben minden lapot pontosan 5 él határol. A válasz tehát az, hogy 12 a tartományok maximális száma a feladatban kikötött feltételek mellett. (2 pont)

5. A Mikulás szaloncukrot porcióz a BME 368 elsőéves villamosmérnök-hallgatójának. Azoknak, akik meg tudták oldani a ZH-n a róla szóló feladatot, fejenként 17, a többieknek pedig fejenként 10 cukor jár. A Mikulás a szaloncukrot 500 darabos csomagokban tárolja, és ezekből csak annyit bont fel, amennyit feltétlenül szükséges. A munka végeztével kimaradó 5 szaloncukrot a krampuszok felhabzsolták. Hányan oldották meg a szóban forgó ZH példát?

   Legyen x a példát megoldó villamosmérnök-hallgatók száma. Ekkor a kiosztott szaloncukrok száma $17x + 10(368 - x) = 7x + 3680$. (1 pont)
   A kimaradó 5 cukorral együtt 500-zal osztható számú szaloncukorról van szó, így a $7x + 3685 \equiv 0(500)$ lineáris kongruencia adódik. (2 pont)
   Ezt átírva kapjuk, hogy $7x \equiv 315(500)$, amit szerencsésen el tudunk osztani 7-tel az órán tanult módon: $x \equiv 45(500)$. (5 pont)
   Tekintettel arra, hogy $0 \leq x \leq 368$, egyedül az $x = 45$ lehet a megoldás. (2 pont)

   Természetesen más utat is követhetünk.

   Legyen y a felbontott szaloncukorcsomagok száma. Mivel mindenki kapott legalább 10 szaloncukrot, ezért bizonyosan szükség volt 3680 cukorra. Ezen túl annyiszor 7 cukrot kell kiosztani, ahányan megoldották a szóban forgó feladatot, és még marad 5 cukor. Ezért $500y - 3685$-nak 7-tel oszthatónak kell lennie. (2 pont)
   Innen adódik az $500y \equiv 3685(7)$ kongruencia, (1 pont)
   amit átírhatunk $3y \equiv 3(7)$ alakba. (1 pont)
   Osztás után $y \equiv 1(7)$ adódik. (1 pont)
   A felbontott csomagok számára $10 \cdot 368 \leq 500y \leq 17 \cdot 368$ teljesül, ahonan $7 < \frac{3680}{500} y \leq \frac{17 \cdot 368}{500} < \frac{20 \cdot 400}{500} = 16$ adódik. (3 pont)
   Az egyetlen szóba jövő megoldás az $y = 8$. Ha tehát x hallgató kapott 17 cukrot, akkor $17x + 10(3680 - x) = 8 \cdot 500 = 4000$, és innen kapjuk az $x = 45$ megoldást. (2 pont)

$\boxed{\star}$ Tegyük fel, hogy az 500 csúcsú, egyszerű G gráfnak 450 olyan csúcsa van, amelyek egyikének a fokszáma sem több 49-nél. Igazoljuk, hogy G kromatikus számára $\chi(G) \leq 50$ teljesül.

Azt kell megmutatnunk, hogy 50 szín elegendő G csúcsainak kiszínezéséhez. (1 pont)
Az órán tanult mohó színezést végezzük el, mégpedig úgy, hogy a 450 db legfeljebb 49-fokú csúcsot megelőzze a maradék 50 csúcs színezése. (4 pont)
Ekkor a elsőként színezett 50 gráfcsúcshoz bizonyosan nem használunk 50-nél több színt. (2 pont)
Az ezt követő 450 csúcs mindegyikének legfeljebb 49 szomszédja lett korábban kiszínezve, ezért legfeljebb 49-féle szín van kizárva a konkrét csúcs kiszínezésekor. (2 pont)
Ezek szerint a mohó színezés során sosem kényszerülünk egy 51-dik színt használni, más szóval a mohó színezés segítségével G csúcsainak kiszínezéséhez legfeljebb 50 színt használunk. Mi pedig pontosan ezt akartuk bizonyítani. (1 pont)

A Számítástudomány alapjai

1. pZH javítókulcs (2017. 12. 11.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Hányféleképp tölthető ki egy ötöslottószelvény úgy, hogy a lehetséges 90 számból legalább egy 10-zel oszthatóra is tippeljünk?

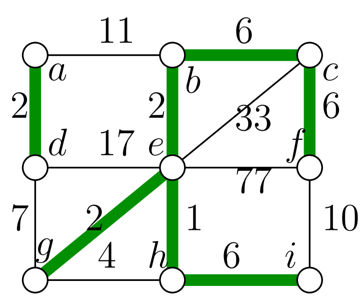
   Az ötöslottószelvény összes lehetséges kitöltéseinek száma $\binom{90}{5}$. (3 pont)
   Ezekből a rossz kitöltések azok, amelyekben nem tippeltünk 10-zel osztható számra, azaz a a maradék 81 számból tippeltünk ötöt. (3 pont)
   Az ilyen rossz kitöltések száma tehát $\binom{81}{5}$. (2 pont)
   A válasz a feladatra e két mennyiség különbsége, azaz $\binom{90}{5} - \binom{81}{5}$. (2 pont)

2. Tegyük fel, hogy az F fának pontosan 333 levele van. Igazoljuk, hogy F-nek van olyan levéltől különböző v csúcsa, aminek a fokszámára $d(v) \neq 5$ teljesül.

   Indirekt bizonyítunk, tegyük fel, hogy F minden levéltől különböző csúcsa ötödfokú. Legyen n az F csúcsainak száma. A tanultak szerint $|E(F)| = n - 1$. (2 pont)
   A handshake lemma miatt $2(n-1) = 2|E(F)| = \sum_{v \in V(F)} d(v) = 333 \cdot 1 + (n - 333) \cdot 5$ (4 pont)
   Rendezés után $3n = 4 \cdot 333 - 2$ adódik, ebből pedig $443 < n < 444$ következik. (2 pont)
   Vagyis n nem egész, ám ez ellentmond a feltevésünknek. Azt kaptuk tehát, hogy a feladatban megfogalmazott állítás igaz: F-nek csakugyan van olyan csúcsa, aminek a fokszáma nem 5 és nem 1. (2 pont)

3. A felső ábrán látható G gráf éleire írt számok az adott él megépítésének költségét jelentik. Mennyi a lehető legkisebb költség, amivel elérhetjük, hogy megépüljön G egy feszítőfája, ha az egyik alvállalkozónkkal korábbi tartozásai okán ingyen meg tudunk építtetni egy általunk kiválasztott, tetszőleges élt?

   A G egy feszítőfáját fogjuk megépíteni, amelynek nyilván a legdrágább élét építtetjük meg a lekötelezett alvállalkozóval. Mivel a feszítőfának pontosan 8 éle lesz, nekünk az a feladatunk, hogy úgy építsünk meg 7 élt, hogy azok erdőt alkossanak és az összköltségük a lehető legkisebb legyen. Ennek az erdőnek két komponense lesz, és mindegyik komponens egy-egy minimális költségű feszítőfa lesz a saját ponthalmazán. Ezért e két feszítőfa megépíthető a Kruskal-algoritmus segítségével. Ez a hét él tehát megkapható úgy, hogy ha a szokásos Kruskal-algoritmust futtatjuk mindaddig, amíg meg nem építünk 7 élt. (Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy mégiscsak végigfuttatjuk a Kruskal-algoritmust a feladatban szereplő gráfon, nekünk pedig az outputként kapott minimális költségű feszítőfa éleit kell megépíteni, a legdrágább él kivételével. (2 pont)

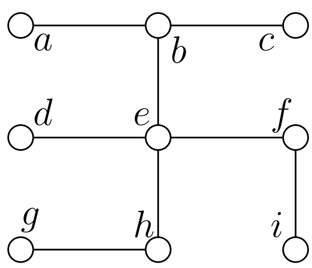
   

   Az ábrán látható az órán tanult Kruskal algoritmus által megépített első 7 él. Ezt úgy kaptuk, hogy növekvő költség sorrendjében döntöttük el az élekről, hogy megépítjük-e, és egy élt akkor építettünk meg, ha nem hozott létre kört korábban megépített élekkel. (6 pont)
   Ezen élek összköltsége 25, tehát ennyi a válasz a feladat kérdésére is. (2 pont)
   Az alvállalkozónkkal pedig tárgyalást kezdünk arról, hogy milyen szolgáltatást nyújt nekünk, ha a de helyett „csak" a dg élt kell megépítenie. (0 pont)

4. Legfeljebb hány éle lehet annak az irányítatlan G gráfnak, amelynek egyszerre e és f gyökerű DFS fája az alsó ábrán látható gráf?

Az órán azt tanították, hogy a DFS bejárás után irányítatlan gráfban nincs keresztél. (3 pont)

Jelen esetben ez azt jelenti, hogy G-nek a megadott feszítőfán kívüli élei olyanok, hogy azok végpontjai egymás leszármazottai, bármelyik gyökérből is nézzük. (1 pont)



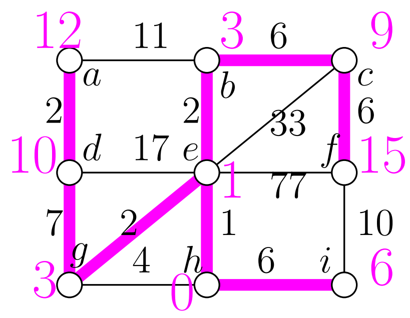
Ezt a tulajdonságot csak az e gyökérből csak az ea, ec, eg és ei élek teljesítik, azonban e négy él közül ei keresztél az f gyökérből nézve. (4 pont)

Könnyen látható, hogy megadott fa egyszerre e és f gyökerű DFS-fája is annak a gráfnak, ami a fából az ea, ec és eg élek hozzávételével keletkezik. (1 pont)

Tehát a válasz a feladat kérdésére $8 + 3 = 11$, hiszen a fának 8 éle van, és e-ből még további 3 húzható be. (1 pont)

5. Határozzuk meg, hogy a felső ábrán látható G gráfnak melyik az a két csúcsa, amelyeknek a h-tól mért távolsága pontosan 1-gyel tér el egymástól. Az élekre írt számok most az adott él hosszát jelentik.

Tekintettel arra, hogy minden élhossz nemnegatív, és minket a h-ból mért távolságok érdekelnek, az órán tanult Dijkstra-algoritmus alkalmazásával meghatározzuk G csúcsainak a h-tól mért távolságát. (2 pont)



Az algoritmust lefuttatva a csúcsok $h, e, g, b, i, c, d, a, f$ sorrendben kerülnek a KÉSZ halmazba, a legrövidebb utak fája és az egyes csúcsok h-tól mért távolsága az ábrán látható. (6 pont)

A feladat kérdésére tehát a válasz az, hogy a c és d csúcsok h-tól mért távolsága különbözik pontosan 1-gyel. (2 pont)

$\boxed{\star}$ A G egyszerű gráfnak 33 piros, 777 fehér, 333 zöld, valamint 77 sárga csúcsa van. Két csúcs között pontosan akkor fut él, ha azok különböző színűek. Behúzható-e G-be néhány további él úgy, hogy olyan egyszerű gráfot kapjunk, aminek van Euler-sétája?

A G gráfban minden csúcs foka páratlan, (1 pont)

márpedig az Euler-séta meglétéhez az szükséges, hogy legfeljebb két páratlan fokú csúcs legyen a gráfban. (1 pont)

Ezért nekünk úgy kell további éleket behúznunk, hogy legfeljebb két kivételtől eltekintve minden csúcsból páratlan számú újonnan behúzott él induljon. (2 pont)

Az új élek behúzásával kapott gráfnak egyszerűnek kell maradnia, ezért csakis azonos színű csúcsok közé húzhatunk be új élt. (1 pont)

A handshake lemma miatt a 33 piros pont között behúzott élek alkotta gráfnak nem lehet minden pontja páratlan fokú, ezért lesz olyan piros pont, amiből páros sok új él indul. Hasonlóan lesz ilyen csúcs a fehér, a zöld és a sárga csúcsok között is. Ezen csúcsok fokszáma pedig a kiegészített gráfban páratlan lesz. (4 pont)

Azt kaptuk, hogy bárhogyan is próbálkozunk legalább 4 páratlan fokú csúcs marad, így nem érhető el a feladatban leírt tulajdonság. (1 pont)

A Számítástudomány alapjai

2. pZH javítókulcs (2017. 12. 11.)

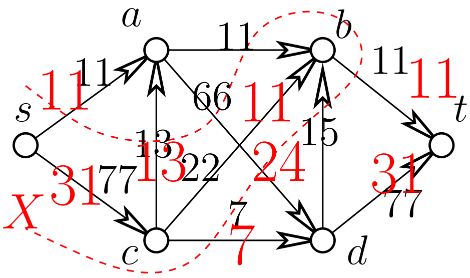
Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Legfeljebb mennyi lehet egy legfeljebb 100-élű egyszerű gráf kromatikus száma?

   Tegyük fel, hogy a G gráf legfeljebb 100 élű, és a lehető legkevesebb színnel van kiszínezve. Ekkor bármely két színosztály között kell élnek vezetnie, ugyanis ha két színosztály csúcsai között nem vezetne él, akkor e két színosztály csúcsait közös színnel színezve a kromatikus számánál eggyel kevesebb színnel tudnánk G-t kiszínezni, ami lehetetlen. (3 pont)
   Ez azt jelenti, hogy ha k színosztály van a színezésben, akkor $100 \geq \binom{k}{2}$ (3 pont)
   Mivel $\binom{15}{2} = 15 \cdot 7 = 105 > 100$, ezért a kromatikus szám 15-nél bizonyosan kisebb. (2 pont)
   A 14 viszont elérhető, pl K_{14} megfelel. (1 pont)
   A feladat kérdésére tehát 14 a válasz. (1 pont)

2. Mennyivel növekszik meg a maximális nagyságú st-folyam nagysága akkor, ha a jobb oldali hálózatban az ab él kapacitását 22-re növeljük?

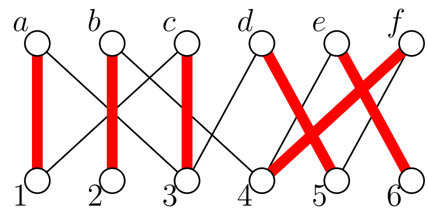
   Maximális nagyságú folyamot keresünk az órán tanult Ford-Fulkerson algoritmus segítségével a megadott hálózatban. Az aktuális segédgráf néhány st-útja mentén történő javítások után az ábrán látható, 42 nagyságú f folyamot kapjuk. (A nagyobb méretben (pirossal) szedett számok az f folyam értékét jelzik az adott élen, ha egy e élen nincs ilyen szám, akkor $f(e) = 0$.) (4 pont)
   A folyamot egyébként úgy kaptuk, hogy sorra az *sabt* (11), *scdt* (7), *scadt* (13), *scbadt* (11) utakon javítottunk, zárójelben a javítás során elküldött folyam nagysága áll. (0 pont)

   Az f folyamhoz tartozó segédgráfban s-ből elérhető pontok X halmaza által meghatározott st-vágás szintén 42 kapacitású, az ab él kapacitásától függetlenül. (4 pont)
   Mivel a hálózatban létezik 42 nagyságú folyam és ugyanekkora kapacitású st-vágás, ennél nagyobb st-folyam akkor sem található, ha az ab él kapacitását megnöveljük. Ezért a maximális folyamnagyság nem változik akkor, ha az ab él kapacitása 22-re nő. (2 pont)

   (A teljes értékű megoldáshoz nem szükséges, hogy a hallgató megindokolja, hogyan talált 42 nagyságú st-folyamot ill. ugyanekkora kapacitású st-vágást. Ha azonban valamelyik ezek közül hibás, akkor nincs megindokolva az optimalitás. Ha szerepel a folyamalgoritmus, de valamit elszámol a hallgató, akkor viszont egyértelműen jár részpontszám.)

3. A G páros gráf színosztályai $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ ill. $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, élei pedig $a1$, $a3$, $b2$, $b4$, $c1$, $c3$, $d3$, $d5$, $e4$, $e6$, $f4$, $f5$. Teljesül-e A-ra a Hall-feltétel?

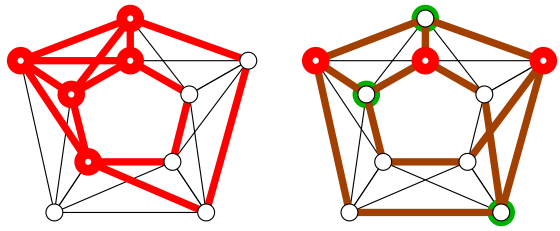
   

   A Hall-tétel szerint pontosan akkor teljesül a Hall-feltétel, ha G-nek van az A színosztályt fedő párosítása. (3 pont)
   Az $a1, b2, c3, d5, f6, e4$ élek teljes párosítást alkotnak. (6 pont)
   A teljes párosítás fedi az A színosztályt, tehát az A színosztályra teljesül a Hall-feltétel. (1 pont)

   Nem szükséges megindokolni, hogyan találta a hallgató a teljes párosítást. Természetesen ha az órán tanult módon keres ilyet, azért részpontszám jár, még ha nem is fejezi be a megoldást. A G gráf helyes lerajzolása 1 pontot ér.

4. Síkbarajzolható-e a jobb oldalon látható gráf?

Kuratowski tétele szerint egy gráf pontosan akkor síkbarajzolható, ha nem tartalmazza részgráfként sem a K_5, sem a $K_{3,3}$ egy felosztását. (2 pont)
A bal oldali ábra mutatja, hogy a megadott gráf részgráfként tartalmazza a K_5 egy felosztását, (7 pont)
ezért a kérdezett gráf nem síkbarajzolható. (1 pont)
A második ábrán egy topologikus $K_{3,3}$ részgráf látható.



Avagy:

Az órán azt tanították, hogy ha egy egyszerű síkbarajzolható gráf csúcsainak száma $n \geq 3$, akkor élszámára $e \leq 3n - 6$ teljesül. (4 pont)
Jelen esetben a gráfnak $n = 10$ csúcsa és $e = 25$ éle van (1 pont)
márpedig ha síkbarajzolható lenne, akkor legfeljebb $3 \cdot 10 - 6 = 24$ éle lehetne. (4 pont)
Tehát az ábrán látható gráf nem síkbarajzolható. (1 pont)

Ha valaki a négyszíntételre hivatkozik, akkor az önmagában 3 pontot ér. Ha közli, hogy a ZH-ban szerepelt, hogy ez a gráf nem színezhető 4 színnel, akkor az újabb 3 pont. Ha pedig ennek a ténynek a bizonyítását is leírja, azért jár a fennmaradó 4 pont.

5. Oldjuk meg a $21x \equiv 35(68)$ kongruenciát.

Mivel $(68, 21) = 1$, ezért pontosan egy megoldás lesz modulo 68. (1 pont)
Ekvivalens átalakításokkal dolgozunk, először a 68-hoz relatív prím 3-mal szorzunk: $63x \equiv 105(68)$, amit $-5x \equiv 37$ alakba írhatunk át. A 13-mal szorzás ismét ekvivalens átalakítás, így $-65x \equiv 481(68)$ adódik, amit $3x \equiv 5(68)$ alakba írhatunk. Furfangosan ezt $3x \equiv -63(68)$ alakba írva oszthatunk 3-mal: $x \equiv -21(68)$, (8 pont)
azaz $x \equiv 47(68)$ a megoldás. (1 pont)

Működik persze az univerzális módszer is.

$21x \equiv 35(68)$ és $68x \equiv 0(68)$ $\iff$ $5x \equiv -105(68)$ és $21x \equiv 35(68)$ $\iff$ $5x \equiv 31(68)$ és $21x \equiv 35(68)$ $\iff$ $x \equiv 35 - 4 \cdot 31(68)$ és $5x \equiv 31(68)$ $\iff$ $x \equiv -21(68)$ és $5x \equiv 31(68)$ $\iff$ $x \equiv -21(68)$ és $0x \equiv 31 + 5 \cdot 21 = 136 \equiv 0(68)$. (9 pont)
A megoldás tehát az $x \equiv -21 \equiv 47(68)$ (1 pont)

$\boxed{\star}$ Tegyük fel, hogy $c : E \to \mathbb{R}_+$ kapacitásfüggvény a $G = (V, E)$ irányított gráf élein, valamint s, x és t a G csúcsai. Lehet-e 222 a maximális nagyságú sx-folyam nagysága, ha tudjuk, hogy a maximális nagyságú st-folyam nagysága 111 és a maximális nagyságú xt-folyam nagysága pedig 333?

Mivel a maximális nagyságú st-folyam nagysága 111, ezért létezik olyan X halmaz, amely 111 nagyságú st-vágást indukál. (3 pont)
Nyilván $s \in X$ és $t \notin X$. Ha most $x \in X$, akkor X egyúttal 111 kapacitású xt-vágást is meghatároz, ami lehetetlen, hiszen a feladat szövege szerint létezik 333 nagyságú (tehát 111-nél nagyobb) xt-folyam. (3 pont)
Ezek szerint $x \notin X$. Ám ekkor X egy 111 nagyságú sx-vágást indukál. (3 pont)
Ez pedig azt jelenti, hogy nem létezhet 111-nél nagyobb sx-folyam, így 222 nagyságú sem. (1 pont)