A Számítástudomány alapjai

1. ZH javítókulcs (2011.10.13.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában 1 pontot vonunk le.

1. A Mikulás öt pendrive-ot hozott, amik egyenként $1, 3, 5, 7$ és 9 gigabájtosak. Öcsénkkel kell ezeken megosztoznunk. Hányféleképp tehetjük ezt meg, ha a mi memóriáink kapacitásainak összegének testvérünkéiéiénél mindenképpen nagyobbnak kell lennie, és tökéletesen igazságosnak érezzük azt is, ha az összes eszköz nekünk jut?

   Az ötféle ajándékból $2^5 = 32$-féle részhalmaz képezhető. (2 pont)
   Ezekből kell azok számát meghatározni, amit ajándékba kaphatunk a magunk támasztotta önző feltétel betarttásával. (1 pont)
   Mivel az öt kapacitás összege 25, azokat a részhalmazokat kell leszámolnunk, ahol a megfelelő összkapacitás legalább 13 Gb. (1 pont)
   Vegyük észre, hogy bármely részhalmaz és a komplementere közül pontosan az egyiknek lesz az összkapacitása legalább 13 Gb, (5 pont)
   ezért az összes lehetséges részhalmaznak a fele, azaz $2^4 = 16$ a keresett részhalmazok száma, és egyúttal ez a válasz a feladat kérdésére is. (1 pont)

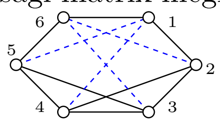
   Természetesen az első 4 pont megszerzése után úgy is befejezhető a megoldás, hogy izomból leszámoljuk a megfelelő részhalmazokat, pl úgy, hogy 1-elemű nincs, két eleműből van 2, három eleműből 8, négy eleműből 5 végül 5-eleműből 1.

2. Rajzoljuk le azt a G gráfot (pontosabban annak egy diagramját), aminek szomszédossági mátrixa

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&1 \\ 1&0&1&1&0&0 \\ 0&1&0&1&1&0 \\ 0&1&1&0&1&0 \\ 0&0&1&1&0&1 \\ 1&0&0&0&1&0 \end{pmatrix}$$

   Legkevesebb hány élt kell G-be behúzni az egyszerűség megtartásával úgy, hogy reguláris gráfot kapjunk?

   A tanultak szerint akkor fut él két csúcs között, ha a szomszédossági mátrix megfelelő mezejében 1-es

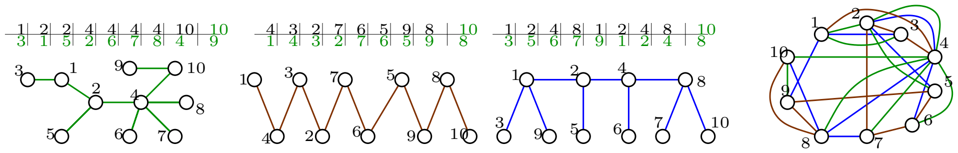


   található. Ennek alapján G a fekete, folytonos élek alkotta gráf: (5 pont)
   G-ben a csúcsok fokszámai 2 ill. 3. Ha G-t 3-reguláris gráffá akarjuk kiegészíteni, akkor a két másodfokú csúcs közé élt kellene behúznunk, amit nem tehetünk meg az egyszerűség megtartásával. (2 pont)
   Tehát legalább 4-reguláris gráfot kell készítenünk, azaz a két másodfokú pontból még legalább $2-2$ élt kell behúznunk, összesen tehát legalább 4-et. (2 pont)
   Ezt meg is tudjuk tenni, pl az ábrán látható kék, szaggatott éleket behúzva, tehát 4 a válasz a kérdésre. (1 pont)

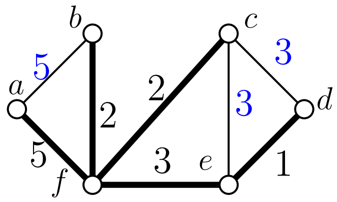
3. Tekintsük az $(1, 2, 2, 4, 4, 4, 4, 10)$, $(4, 3, 2, 7, 6, 5, 9, 8)$ és $(1, 2, 4, 8, 1, 2, 4, 8)$ Prüfer-kódú fákat. Alkossák a G gráf élhalmazát ezen fák élei azzal, hogy ha két csúcs k fában szomszédos, akkor G-ben az adott élnek k párhuzamos példánya található. Van-e G-nek Euler-köre?

Mindhárom Prüfer-kód 8 hosszúságú, ezért 10 címkézett pontja van a G gráfnak (2 pont)
Mivel mindegyik fa összefüggő, ezért uniójuk, G is az. (1 pont)
Az órán azt tanultuk, hogy véges összefüggő gráfnak pontosan akkor van Euler-köre, ha minden csúcsa páros fokú. (2 pont)
Olyat is tanítottak, hogy a Prüfer-kódban minden csúcs eggyel kevesebbszer szerepel, mint a fabeli fokszáma. (2 pont)
Ha gondosan összeszámoljuk, akkor azt tapasztaljuk, hogy az $1, 2, \ldots, 10$ címkék mindegyike páratlan sokszor szerepel a 3 Prüfer-kódban, és ennél az előfordulási számnál a fokszáma 3-mal nagyobb. (2 pont)
Ez azt jelenti, hogy G-ben minden csúcs fokszáma páros lesz, ezért a fentiek miatt G-nek van Euler-köre. (1 pont)

(Ha vki megkonstruálja a 3 fát, észreveszi, hogy összefüggő, és azon számolgat fokszámokat, az is teljes pontszámot ér. Ha vmik fát elrontja, akkor rontott fánként 1-1 pontot levonunk. Ha ezen az úton próbálkozik, de kiderül, hogy nem tud Prüfer-kódot dekódolni, akkor max 5 pont jár.) Itt vannak egyébként a G-t alkotó fák és G:



4. Az ábrán látható G gráfnak megjelöltük egy F feszítőfáját és a feszítőfa éleinek súlyait. Határozzuk meg, mennyi lehet a G gráf feszítőfán kívüli éleinek minimális összsúlya akkor, ha F minimális súlyú feszítőfája G-nek.



Ahhoz, hogy F minimális súlyú feszítőfa legyen az szükséges, hogy a fába be nem választott élek bármelyikét ha becseréljük a két végpontja között futó fabeli út valamelyik élére, attól a keletkező fa súlya ne csökkenhessen, (3 pont)
azaz bármely fán kívüli él súlya legalább annyi legyen, mint a végpontjai között futó F-beli úton levő élek súlyainak maximuma. (3 pont)

Ez konkrétan azt jelenti, hogy az ab él súlya legalább 5, a cd élé legalább 3, végül a ce él is legalább 3 súlyú. (2 pont)
Ha pedig ezeket a súlyokat adjuk a fenti éleknek, akkor az órán tanult Kruskal algoritmus meg tudja találni az F fát. (1 pont)
Az tehát a válasz, hogy a maradék élek összsúlya legalább $5 + 3 + 3 = 11$. (1 pont)

5. Az F fa Prüfer kódja $(1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4)$. Hány éle van F komplementerének?

A Prüfer kód hossza 10, ezért az általa kódolt feszítőfának 12 csúcsa van. (2 pont)
Ezért az F feszítőfa élszáma 11. (3 pont)
A 12 pontú teljes gráf éleinek száma $\binom{12}{2} = \frac{12 \cdot 11}{2} = 6 \cdot 11 = 66$, (3 pont)
ezért a komplementernek $66 - 11 = 55$ éle van. (2 pont)

Természetesen nem tilos F meghatározása sem. Aki csak ennyit tesz, annak az első 5 pont jár.

6. Tegyük fel, hogy a 16 pontú K_{16} teljes gráf éleit 4-féle színnel színeztük ki úgy, hogy minden egyes színre az adott színnel színezett élek reguláris gráfot alkotnak K_{16} csúcsain. Igazoljuk, hogy kiválasztható két szín a 4 közül úgy, hogy az e két színnel színezett élekből található K_{16}-nak Hamilton köre.

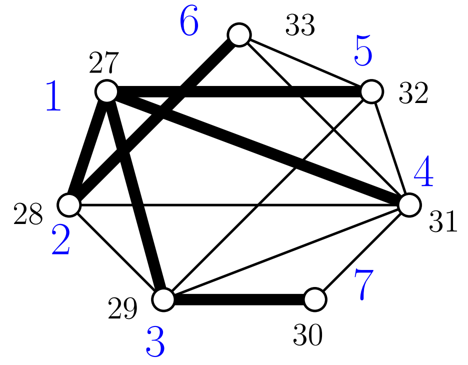
Válasszuk ki azt a két színt, amikből a lehető legtöbb azonos színű él indul a csúcsokból. Mivel K_{16} minden csúcsából 15 él indul amiket 4-félére színeztünk, ezért a két leggyakoribb színből legalább az élek fele, azaz legalább 8 él indul. (4 pont)
Ha tehát G az a gráf, amit a két kiválasztott színnel színezett élek alkotnak, akkor G olyan reguláris gráf, amiben minden csúcsnak legalább 8 a fokszáma (2 pont)
Az órán tanult Dirac tétel szerint ha egy gráfban minden csúcsból legalább annyi él indul, mint a csúcsok számának a fele, akkor a gráfban van Hamilton kör. (3 pont)
Jelen esetben teljesül a fenti Dirac feltétel, ezért G-nek van Hamilton köre, ami éppen a feladat állítását bizonyítja. (1 pont)

A Számítástudomány alapjai

2. ZH javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában 1 pontot vonunk le.

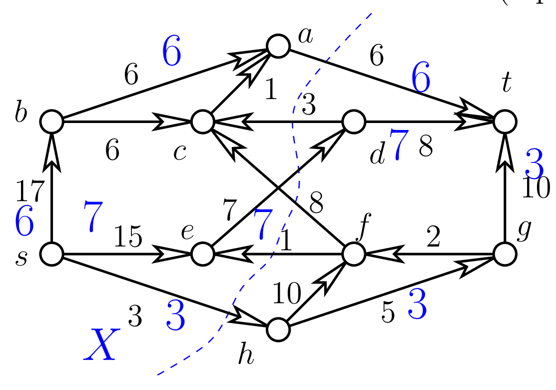
1. Legyen a $G = (V, E)$ gráf csúcshalmaza $V = \{27, 28, \ldots, 33\}$, él pedig akkor fusson két csúcs között, ha indexeik relatív prímek: $E = \{ij : (i, j) = 1\}$. Rajzoljuk le G diagramját, indítsunk a „27" csúcsból szélességi bejárást, valamint határozzuk meg a bejáráshoz tartozó fát és a többi csúcsnak a „27" csúcstól való távolságát.

   Az ábrán látható G diagramja. (3 pont)
   Az órán tanult BFS algoritmust futtatva a nagyobb, kék számok jelzik az egyes csúcsok szélességi számozását (azaz az elérési sorrendet), a vastagon húzott élek pedig azt mutatják, hogy az adott csúcsot melyik másik csúcsból értük el. (5 pont)
   A „27" csúcstól mért távolságok a BFS fán mért távolságokkal azonosak, azaz a $28, 29, 31$ és 32 csúcsok 1, míg a 30 és 33 csúcsok 2 távolságra vannak. (2 pont)

2. Az alábbi ábrán látható G gráfban az élekre írt számok az egyes élek kapacitását jelentik. Határozzunk meg az összes irányított st utat lefogó élhalmazok közül egy minimális összkapacitásút.

   A feladat szerint minimális kapacitású st-vágást kell keresnünk az ábrán megadott hálózatban, és a válasz ennek a vágásnak az s-t tartalmazó részből a t-t tartalmazó részbe futó élei lesznek. (2 pont)
   Ehhez maximális nagyságú folyamot keresünk az órán tanult növelő utas algoritmussal. A kapott folyamot és a maximalitást bizonyító minimális vágást meghatározó X halmazt a rajzon megjelöltük. (6 pont)
   Ezek szerint az at, ed, sh élek rendelkeznek a feladatban leírt tulajdonsággal: összkapacitásuk 16, és ennél kisebb összkapacitású st-vágás nem létezhet a rajzon jelölt 16 nagyságú folyam miatt. (2 pont)

3. A villamosmérnök-hallgatók számára beüzemeltek néhány számítógépet. Minden hallgatónak legalább 10 gépre van belépési jogosultsága, minden gépen pedig legfeljebb 7 hallgatónak van felhasználói fiókja. Igaz-e, hogy ekkor bizonyosan leültethetünk minden villamosmérnök-hallgatót egy-egy különböző számítógéphez úgy, hogy mindenki olyan géphez üljön, amire be tud lépni?

   Legyenek a G páros gráf színosztályai a villamosmérnök-hallgatók ill. a beüzemelt számítógépek halmazai, és akkor fusson él egy hallgató és számítógép között, ha az adott hallgató be tud lépni az adott gépre, azaz rendelkezik ott felhasználói fiókkal. A cél, hogy olyan párosítás létezését igazoljuk, ami minden hallgatót fed. G-ről annyit tudunk, hogy a hallgató-színosztályban minden fok legalább 10, a számítógép-színosztály tetszőleges csúcsából pedig legfeljebb 7 él indul. (3 pont)
   Ehhez a Hall tételt fogjuk használni, ami szerint akkor létezik ilyen párosítás, ha a hallgatók tetszőleges k elemű részhalmazához legalább k olyan beüzemelt számítógép létezik, amin a k hallgató legalább egyikének van felhasználói fiókja. (3 pont)

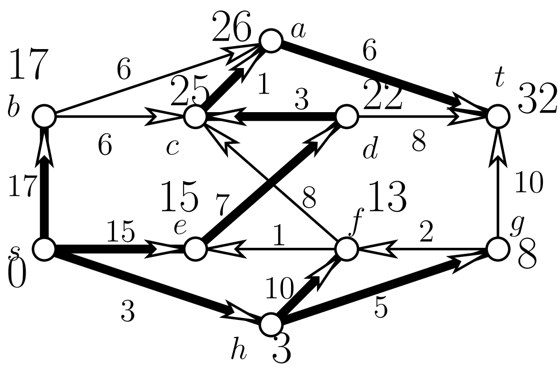
Tegyük fel, hogy a k hallgatóhoz tartozó számítógépek száma m. Mivel a k hallgatóból G-nek legalább $10k$ él indul és ezen élek mindegyike az m számítógép valamelyikéhez tartozik, ezért a $10k$ él részhalmaza az m számítógép-csúcsból induló legfeljebb $7m$ élnek. (2 pont)
Ezek szerint $10k \leq 7m$, ahonnan $k \leq m$ következik, és nekünk pontosan ezt kellett igazolnunk az állítás bizonyításához. (2 pont)

4. Tegyük fel, hogy G olyan gráf, amire $\Delta(G) \leq 3$ és G-nek legfeljebb 5 harmadfokú csúcsa van. Bizonyítsuk be, hogy G síkbarajzolható.

Az órán szerepelt Kuratowski tételt fogjuk felhasználni, ami szerint ha egy G gráf nem síkbarajzolható, akkor tartalmaz $K_{3,3}$-mal vagy K_5-tel topologikusan izomorf részgráfot. (3 pont)
Márpedig ha egy gráf $K_{3,3}$-mal topologikusan izomorf, akkor annak pontosan 6 harmadfokú csúcsa van, így G-nek is legalább hat legalább harmadfokú csúcsának kell lennie, hogy ilyen részgráfja lehessen. (3 pont)
Ha pedig egy gráf K_5-tel topologikusan izomorf, akkor pontosan 5 negyedfokú csúcsa van, ezért ha G ilyen részgáfot tartalmaz, akkor $\Delta(G) \geq 4$ teljesül. (3 pont)
A feladatban szereplő G gráfra mindkét fenti eset elképzelhetetlen, ezért G a Kuratowski tétel miatt bizonyosan síkbarajzolható. (1 pont)

5. Határozzuk meg a fenti ábrán látható PERT probléma legrövidebb végrehajtási idejét, és állapítsuk meg, mik a kritikus tevékenységek.

Az órán tanult módszerrel dolgozunk. Először meghatározzuk G egy topologikus sorrendjét, pl. $s, h, g, f, e, b, d, c, a, t$-t. (2 pont)
Ezt követően a csúcsokat ebben a sorrendben dolgozzuk fel, azaz meghatározzuk a legkorábbi kezdési időt, és azt az élt (vagy éleket), ami ezt okozza. Az eredmény az ábrán látható. (5 pont)
Ezek szerint a legrövidebb végrehajtási idő $t = 32$, (1 pont) és mivel egyetlen kritikus út vezet s-ből t-be, a kritikus tevékenységek ezen út csúcsai, azaz s, e, d, c, a, t. (2 pont)



6. Tegyük fel, hogy az $n > 5$ egész szám pozitív osztóinak összege $\sigma(n) = n + 1$. Mutassuk meg, hogy n szomszédainak pozitív osztói összegére $\sigma(n-1) + \sigma(n+1) \geq 3n + 6$ teljesül.

Mivel $1 \mid n$ és $n \mid n$, ezért $\sigma(n) = n + 1$ csak úgy lehetséges, ha n prímszám. (3 pont)
Az $n > 2$ feltétel miatt n páratlan, ezért $2 \mid n - 1$ és $2 \mid n + 1$, (1 pont)
ezért $\frac{n-1}{2} \mid n - 1$ és $\frac{n+1}{2} \mid n + 1$. (2 pont)
(Ráadásul $n > 5$ miatt $2 < \frac{n-1}{2}$ is teljesül, tehát különböző osztókról van szó.) (0 pont)
Innen azt kapjuk, hogy $\sigma(n-1) \geq 1 + 2 + \frac{n-1}{2} + (n-1)$ ill. $\sigma(n+1) \geq 1 + 2 + \frac{n+1}{2} + (n+1)$, (2 pont)
ahonnan $\sigma(n-1) + \sigma(n+1) \geq 6 + \frac{n-1}{2} + \frac{n+1}{2} + (n-1) + (n+1) = 3n + 6$ adódik. Nekünk pedig pontosan ezt kellett igazolnunk. (2 pont)

(Az $n > 5$ feltevésre azért volt szükség, mert pl $n = 5$-re azért nem teljesül a feladat állítása, mert $2 = \frac{n-1}{2}$ miatt $(n-1)$-nek csak 3 osztója van. Könnyen látható az is, hogy ilyenkor nem lehet $n - 1$ és $n + 1$ is prímszám kétszerese (hiszen az egyikük 4-gyel is osztható).)

A Számítástudomány alapjai

1. pótZH javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában 1 pontot vonunk le.

1. Hányféleképpen lehet tombolán kisorsolni 5 különböző nyereményt 3 résztvevő között? Hány olyan sorsolás van, ahol minden résztvevő legalább egy nyereményt kap? (Két sorsolás akkor különbözik, ha van olyan nyereménytárgy, amit a két sorsoláson nem ugyanaz nyer meg.)

   Az öt egymást követő sorsolás meghatározza a nyertesek sorrendjét. Ráadásul a 3 résztvevő tetszőleges sorrendje lehet a sorsolás nyertesek sorrendje, azaz a lehetséges nyereménykiosztások kölcsönösen egyértelműen megfelelnek 3 elem 5-ödosztályú ismétléses kombinációinak. (3 pont)
   Az órán azt tanították, hogy ezek száma 3^5. (2 pont)
   Ha csak azokat a sorsolásokat kell megszámlálni, ahol mindenki legalább egy nyereménytárgyat kap, akkor le kell vonni azokat a sorsolásokat, ahol csak legfeljebb 2 nyertes lesz az 5 sorsoláson. (1 pont)
   E két nyertest 3-féleképp választhatjuk, és közöttük a fentiek miatt 2^5-féleképp oszthatjuk szét a nyereményeket. (2 pont)
   Ezzel azonban minden olyan sorsolást, ahol minden nyereménytárgy ugyanahhoz a nyerteshez került, kétszer vontunk le. Ezért azt a 3 esetet még hozzá kell adni az eddigi különbséghez, amikoris mindent ugyanaz a nyertes visz. (1 pont)
   A végeredmény tehát $3^5 - 3 \cdot 2^5 + 3 =$ (1 pont)
   $= 243 - 3 \cdot 32 + 3 = 150.$ (0 pont)

   Lehet persze másképp is számolni a második részt.

   Ha mindenki legalább egy nyereményt nyer, akkor a nyeremények eloszlása $3 + 1 + 1$ vagy $2 + 2 + 1$ lesz. (1 pont)
   Az első esetben 3-féle nyereményt $\binom{5}{3} = 10$-féleképp választhatjuk, a nyertes a 3 játékos bármelyike lehet, a maradék két játékos pedig 2-féleképp osztozhat a két nyereményen, ami $10 \cdot 3 \cdot 2 = 60$ lehetőséget jelent. (2 pont)
   A második esetben 5-féle lehet a magányos nyeremény, ami 3-féle játékoshoz kerülhet, míg a maradék 4 nyereményen a maradék két játékos $\binom{4}{2} = 6$-féleképp osztozhat, ekkor tehát $5 \cdot 3 \cdot 6 = 90$ a lehetőségek száma. Összesen tehát $60 + 90 = 150$-féle kívánt sorsolás lehetséges. (2 pont)

2. A tankör 35 hallgatójából összesen 25-en nem írták meg az első ZH-t SzA ill. Analízis tárgyak valamelyikéből. Míg SzA-ból 12, addig Analízisből 15 hallgató nem írt dolgozatot. Az érintett 25 hallgatóból hányféleképpen választhatnak olyan 5-tagú panaszbizottságot, hogy abban $3 - 3$ olyan hallgató legyen aki nem írta meg az egyes ZH-kat?

   Jelölje x és y azon hallgatók számát, akik csak az SzA, ill. csak az Analízis ZH-t nem írták meg, a másikon pedig próbálkoztak. Legyen továbbá z azoknak a hallgatóknak a száma, akik egyik ZH-n sem adtak be dolgozatot. Ekkor a feladat feltételeiből $x + y + z = 25$, $x + z = 12$ és $y + z = 15$ adódik, ahonnan $z = 2$, $x = 10$ és $y = 12$. (3 pont)
   Legyen az 5-tagú küldöttségben az egyes típusokból a, b és c hallgató. Ekkor $a + b + c = 5$, $a + c = 3 = b + c$, ahonnan $a = b = 2$ és $c = 1$. (3 pont)
   Azt kell tehát megszámolnunk, hogy az egyes hallgatótípusokból hányféleképp választhatjuk ki a küldöttségbe a megfelelő számú hallgatót. Mivel az egyes típusokból a választásaink egymástól függetlenek, (2 pont)
   ezért a válasz $\binom{10}{2} \cdot \binom{12}{2} \cdot \binom{2}{1}$ lesz. (2 pont)

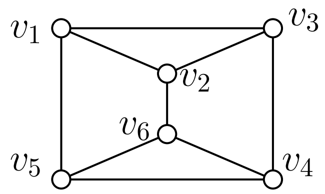
3. Az egyszerű, irányítatlan, 3-reguláris G gráf szomszédossági mátrixának bizonyos elemei kitörlődtek, csupán az alábbi maradt meg:

$$A(G) = \begin{pmatrix} ? & 1 & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & 1 \\ ? & 1 & ? & 1 & 0 & ? \\ ? & ? & 1 & 0 & 1 & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & 1 \\ ? & ? & ? & 1 & 1 & ? \end{pmatrix}$$

Rajzoljuk le a G gráfot (pontosabban annak egy diagramját).

Mivel G egyszerű, ezért nincs benne hurokél, így a szomszédossági mátrix főátlójában csak 0-k szerepelnek. (2 pont)
Irányítatlan gráfról lévén szó a szomszédossági mátrix szimmetrikus, azaz tetszőleges i, j-re ugyanaz a szám áll az (i, j) és a (j, i) helyeken. (2 pont)
Tudjuk még, hogy G 3-reguláris, ezért a mátrix minden sorában és minden oszlopában pontosan 3 a beírt számok összege. (2 pont)
Ennek alapján a mátrix könnyen kiszudokuzható az alábbiak szerint: (2 pont)

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



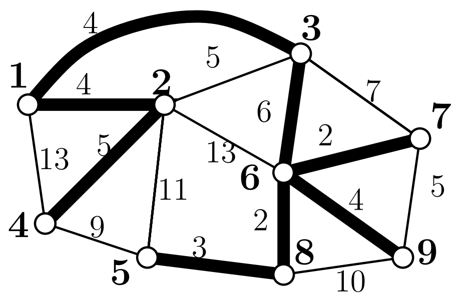
A jobb oldali ábra pedig G egy lehetséges diagramját mutatja. (2 pont)

4. Tegyük fel, hogy az F fának csak első- és hatodfokú csúcsai vannak, szám szerint n_1 ill. n_6. Igazoljuk, hogy $n_1 = 4 \cdot n_6 + 2$.

Tanultuk, hogy minden véges gráfban a fokszámösszeg az élszám kétszerese, (3 pont)
továbbá, hogy egy n csúcsú fának pontosan $n - 1$ éle van. (2 pont)
Ez F-re nézve azt jelenti, hogy $n_1 + 6n_6 = 2n - 2$, ahol $n = n_1 + n_6$ a G csúcsainak száma. (2 pont)
Innen azt kapjuk, hogy $n_1 + 6n_6 = 2(n_1 + n_6) - 2$, (2 pont)
amit rendezve éppen a bizonyítandó állítást kapjuk: $n_1 = 4 \cdot n_6 + 2$. (1 pont)

5. Keressük meg a fenti mátrix melletti ábrán látható gráf egy minimális súlyú feszítőfáját és adjuk meg a Prüfer-kódját.

Az órán tanult Kruskal algoritmus segítségével, az élekről a súlyuk növekvő sorrendjében eldöntve, bevegyük-e azokat a megkonstruált feszítőfába, az ábrán vastaggal jelölt minimális súlyú feszítőfát kapjuk. (5 pont)
Ennek a Prüfer-kódját úgy kapjuk, hogy sorra töröljük a legkisebb sorszámú leveleket, és ebben a sorrendben feljegyezzük a levelek szomszédját, (2 pont)
ám az utolsó szomszédot nem vesszük be a kódba. (1 pont)



A leveleket $4, 2, 1, 3, 5, 7, 8, 6$ sorrendben töröljük, a szomszédok rendre $2, 1, 3, 6, 8, 6, 6, 9$ lesznek, tehát a keresett Prüfer-kód $(2, 1, 3, 6, 8, 6, 6)$. (2 pont)

6. Tudjuk, hogy a 99 csúcsú, egyszerű G gráf maximális fokszáma $\Delta(G) = 30$, másrészt G-nek van Euler-köre. Mutassuk meg, hogy a $\overline{G}$ komplementergráfnak is van Euler-köre.

Tanultuk, hogy összefüggő gráfnak pontosan akkor van Euler-köre, ha minden fokszáma páros. (1 pont)
Ezek szerint G-ben minden fokszám páros. (2 pont)
A $\overline{G}$ komplementergráfban a v csúcs foka $d_{\overline{G}}(v) = 98 - d_G(v)$, (2 pont)
ezért $\overline{G}$-ben is páros lesz minden csúcs foka. (2 pont)
Egyedül annak igazolása van hátra, hogy $\overline{G}$ összefüggő. Ez következik pl a Dirac-tételből, hiszen $\overline{G}$-ben minden fok legalább $98 - 30 = 68 > \frac{99}{2}$ (3 pont)

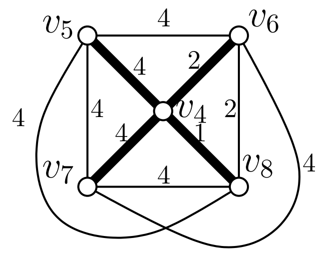
Az utolsó 2 pont úgy is megszerezhető, hogy ha a $\overline{G}$-beli minimális fokszám több, mint $\frac{n}{2}$ (márpedig ez igaz), akkor bármely két nem szomszédos pontnak van közös szomszédja, és ebből azonnal következik az öf tulajdonság.

A Számítástudomány alapjai

2. pótZH javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában 1 pontot vonunk le.

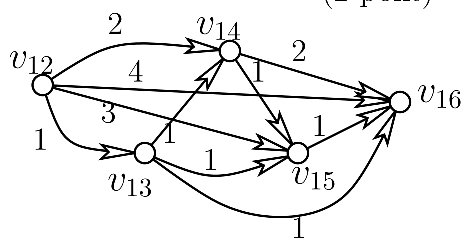
1. Legyen G teljes gráf a $\{v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ ponthalmazon és a v_iv_j él hossza legyen $l(v_iv_j) = \frac{4}{(i,j)}$. Határozzuk meg a v_4 csúcs távolságát G többi csúcsától. Megváltoztatható-e a v_7v_8 él hossza úgy, hogy v_4 és v_7 távolsága 3 legyen?



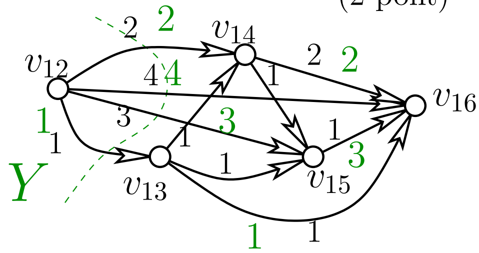
Az ábrán látható a G gráf diagramja az élekre írt számok az adott él hosszát jelentik. (3 pont)
A v_4-től mért távolságokat a v_4-ből indított Dijkstra algoritmus segítségével határozhatjuk meg. Ennek során v_8, v_6, v_5, v_7 sorrendben érjük el a csúcsokat, mindegyik távolságot a v_4-ből vezető közvetlen él határozza meg, tehát a legrövidebb utak fája a v_4 közepű csillag lesz. (3 pont)
Ennek alapján a v_5, v_6, v_7 ill. v_8 csúcsok v_4-től mért távolságai rendre $4, 2, 4, 1$ lesznek. (2 pont)
Mivel $dist(v_4, v_7) = 4 > 3$, és $dist(v_4, v_8) = 1$, ezért ha a v_4v_8 él hosszát 2-re változtatjuk 4-ről, akkor v_4 és v_7 távolsága 3 lesz. (2 pont)

2. A $G = (V, E)$ irányított gráf csúcshalmaza $V = \{v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{16}\}$ és $i < j$ esetén a v_iv_j él kapacitása $c(v_iv_j) = (i, j)$, más éle G-nek nincs. Ha a $v_{15}v_{16}$ él kapacitását tetszés szerint megváltoztathatjuk, mennyi lehet a v_{12}-ből v_{16}-ba vezető maximális folyam nagysága? Mekkora az a legkisebb kapacitás a $v_{15}v_{16}$ élen, amire ez a maximális folyamnagyság elérhető?

Az ábrán az adott látható a hálózat diagramja. (2 pont)



Ezen a tanult javító utas algoritmussal kerestünk maximális nagyságú folyamot, mégpedig av_{12}, v_{16}, v_{12}, v_{14}, v_{16}, v_{12}, v_{13}, v_{16} és v_{12}, v_{15}, v_{16} utakon rendre 4-t, 2-t ill. 1-t, 1-t javítva. (Az egyes éleken felvett értéket a kék színű, nagyobb méretű számok jelzik.) A kapott 8 nagyságú folyam maximalitását az X halmaz meghatárrozta, szaggatottal jelzett 8 kapacitású vágás bizonyítja. (4 pont)
Ha most a $v_{15}v_{16}$ él kapacitását kellően nagynak választjuk, akkor még tovább növelhető a folyam nagysága a v_{12}, v_{15}, v_{16} úton segítségével. Így kapjuk a zölddel jelölt, 10 nagyságú folyamot, aminél nagyobbat nem kaphatunk, hiszen az Y meghatározta vágás kapacitása 10, és ez a vágás nem tartalmazza a $v_{15}v_{16}$ élt. (2 pont)



Ahhoz, hogy az X által meghatározott vágás kapacitása legalább 10 legyen, a $v_{15}v_{16}$ él kapacitását legalább 3-ra kell növelni, tehát ekkora növelés feltétlenül szükséges a 10 nagyságú folyamhoz. Láttuk, hogy ez elég is, tehát, 3 a legkisebb olyan kapacitás, amire ez elérhető. (2 pont)

3. Tekintsük a k-szorosan pontösszefüggő G gráf két diszjunkt példányát és kössük össze a két példányban az egymásnak megfelelő pontokat. Bizonyítsuk be, hogy az így kapott G' gráf $(k+1)$-szeresen összefüggő.

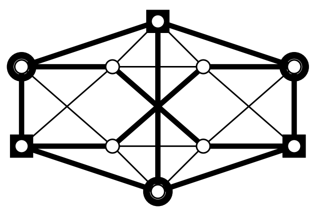
Mivel G k-öf volt, ezért $|V(G)| \geq k + 1$, tehát $|V(G')| = 2 \cdot |V(G)| > k + 1$ is teljesül, ami az egyik feltétel ahhoz, hogy G' k-öf legyen. (1 pont)

A k-szoros pontösszefüggőség definíciója szerint tehát mindössze azt kell ellenőriznünk, hogy ha G' nem eshet szét legfeljebb $k-1$ csúcs elhagyásától. (3 pont)
Tegyük fel tehát, hogy elhagytunk legfeljebb $k-1$ csúcsot G'-ből. Mivel G k-öf, ezért G semelyik diszjunkt példánya sem esett szét, (2 pont)
így mindössze azt kell igazolnunk, hogy maradt a két rész között is él, azaz van olyan csúcs, amit G egyik példányában sem töröltünk. (2 pont)
Ez utóbbi pedig azért igaz, mert G-nek legalább $k-1$ csúcsa van a k-öf tulajdonság miatt, így olyan csúcsának is kell lennie, aminek egyik példányát sem bántottuk a legfeljebb $k-1$ csúcs törlésekor. (2 pont)

4. Tegyük fel hogy 77 iskolás levelez egymással úgy, hogy mindegyiküknek pontosan 8 levelezőpartnere van. Megvalósítható-e, hogy a levelezéshez 8-féle színű borítékot használnak úgy, hogy mindenki különböző színű borítékot használjon az egyes levelezőpartnereihez, és bármely két levelezőtárs között mindkét irányú levélforgalomhoz azonos színű borítékot használjanak?

   Legyenek a $G=(V,E)$ gráf csúcsai az iskolások, él pedig akkor fusson két csúcs között, ha az adott iskolások leveleznek. A feladat feltételeiből G-nek 77 csúcsa van és 8-reguláris. A borítékokra a feladatban megkívánt feltétel pedig pontosan G 8-élszínezhetőségét jelenti, a célunk tehát ennek eldöntése. (3 pont)
   Tegyük fel indirekt, hogy G 8-élszínezhető. Ekkor az azonos színű élek G egy párosítását alkotják. (2 pont)
   Mivel 8 színt használtunk, és minden csúcsból 8-féle színű él indul, ezért az azonos színű élek teljes párosítást alkotnak minden egyes szín esetén. (3 pont)
   Azonban G-nek 77 csúcsa lévén nem létezhet teljes párosítása, az indirekt feltevésünk tehát nem helytálló, G élei nem színezhetők 8 színnel, a borítékokra a feladatban megkívánt elvárás nem teljesíthető. (2 pont)

5. Síkbarajzolható-e az ábrán látható gráf?

   A vastaggal jelölt élek által alkotott részgráf a $K_{3,3}$ gráf egy soros bővítése, ahol a kerek csúcsok a kutak, a négyszögletesek a házkak. (8 pont)
   Tanultuk, hogy $K_{3,3}$ nem síkbarajzolható, így annak soros bővítése sem az, tehát a feladatban szereplő gráf sem síkbarajzolható. (2 pont)

6. Számítsuk ki a $10!+99$ és $9!+9$ számok legnagyobb közös osztóját.

   Az Euklideszi algoritmus kapcsán azt tanították, hogy $(a,b)=(a-b,b)=\ldots=(a-kb,b)$ tetszőleges k egész számra. (2 pont)
   Ezek szerint$(10!+99, 9!+9) = (10!+99-10(9!+9), 9!+9) = (9, 9!+9) = (9!+9, 9) = (9!+9-(8!+1)\cdot 9, 9) = (0,9) = 9$ (7 pont)
   A keresett lnko tehát 9. (1 pont)

   Természetesen közvetlenül az Euklideszi algoritmussal is megoldható a feladat.

A Számítástudomány alapjai

1. ppZH javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában 1 pontot vonunk le.

1. A 174 fős villamosmérnök-évfolyam hallgatói 4-féle tárgyat hallgatnak, mindegyiket ugyanannyian vették fel, minden hallgató felvett legalább egy tárgyat. Senki sincs, aki mind a négy tárgyat felvette, de bármely három tárgyhoz pontosan egy olyan hallgató van, aki azok mindegyikére jár. Ezen kívül bárhogyan is választunk két tárgyat a négyből, pontosan 5 olyan hallgató van, aki mindkettőt felvette. Hány villamosmérnök-hallgató jár az egyes kurzusokra?

   Tegyük fel, hogy a négy kurzus mindegyikét k hallgató vette fel, ezek alkotják az A_1, A_2, A_3 és A_4 halmazokat. A feladat szerint $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = 174$. (2 pont)
   Az órán tanult szita-formula szerint a halmazok uniójának méretét úgy is megkaphatjuk, hogy a halmazok méretének összegéből levonjuk a páronkénti metszetek méretének összegét, hozzáadjuk az összes hármas metszet méretének összegét, majd levonjuk a 4 halmaz metszetének méretét. (4 pont)
   Páronkénti metszetből összesen $\binom{4}{2} = 6$, míg hármas metszetből $\binom{4}{3} = 4$ van, az összes halmaz metszetét pedig egyféleképp lehet képezni, ráadasul az üres. (2 pont)
   Ezek alapján $174 = 4k - 6 \cdot 5 + 4 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = 4k - 26$, (1 pont)
   anonnan $200 = 4k$ ill. $k = 50$ adódik. Ennyien járnak tehát az egyes kurzusokra. (1 pont)

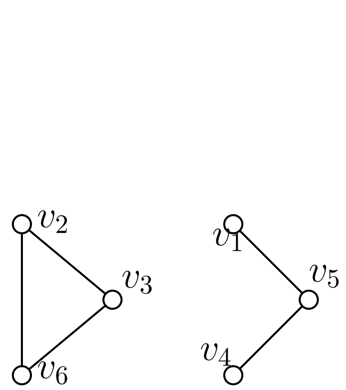
2. Hét villamosmérnök-hallgatóról tudjuk, hogy közülük bármely kettőnek van közös beszédtémája, mégpedig 3 lehetséges téma (táplálkozás, hardware, ellentétes nem) valamelyike. (Lehetséges pl, hogy a és b ill. a és c témája megegyezik, de különbözik b és c közös témájától.) Igazoljuk, hogy kiválasztható a 7 hallgató közül néhány (de legalább 3) olyan, akik körbeülhetnek úgy egy kerek asztalt, hogy az egymás mellett ülőknek ugyanaz legyen a közös témájuk.

   Alkossa a 7 szóban forgó hallgató a G gráf csúcsait, és jelölje E_i $i = 1, 2, 3$ esetén azokat az éleket amit azok közé a hallgatók közé húzunk, akiknek a közös témájuk éppen az i-dik. (2 pont)
   Mivel bármely két hallgató közti él az E_1, E_2 ill. E_3 valamelyikébe beletartozik, ezért ezen élek összesen annyian vannak, mint ahány él behúzható 7 csúcs közé, (2 pont)
   szám szerint $\binom{7}{2} = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 6 = 21$-en. (1 pont)
   Kell lennie tehát olyan i témának, hogy $|E_i|$ legalább $\frac{21}{3} = 7$ élt tartalmaz. (1 pont)
   Tanultuk, hogy egy n pontú körmentes gráfnak legfeljebb $n - 1$ éle lehet, (2 pont)
   ezért ez az E_i élhalmaz biztosan tartalmaz kört. (1 pont)
   Az e kör csúcsainak megfelelő hallgatókat a körnek megfelelően leültetve pedig éppen a feladat állítását igazoljuk. (1 pont)

3. Összefüggő-e az a G gráf, aminek a szomszédossági mátrixa az alábbi?

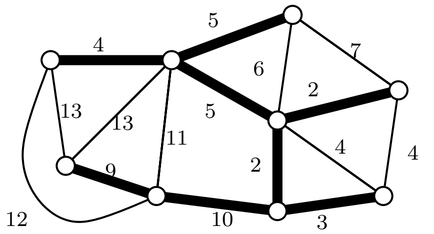
$$A(G) = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&1&0&0&1 \\ 0&1&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&1&0 \\ 1&0&0&1&0&0 \\ 0&1&1&0&0&0 \end{pmatrix}$$

   A jobb oldali ábrán látható a kérdéses gráf egy diagramja. (5 pont)
   Szemlátomást nem vezet él a v_2, v_3, v_6 csúcsokból a v_1, v_4 ill. v_5 csúcsok egyikébe sem, ezért G nem összefüggő. (5 pont)



4. Legyen F az ábrán látható G gráf egy minimális súlyú feszítőfájának élhalmaza. Van-e a $G-F$ gráfnak Euler-köre?

Az órán tanult Kruskal algoritmus segítségével meghatározzunk egy minimális súlyú feszítőfát. Ennek során minden élről (növekvő súlysorrendben) eldöntjük, hogy bevesszük-e, mégpedig annak alapján, hogy kört hoz-e létre az eddig bevett élekkel. Az algoritmus bármely lefutása ugyanazt az F feszítőfát találja meg, amit az ábrán vastag élekkel jelöltünk. (6 pont)
A $G-F$ gráfnak két komponensében is fut él, ezért nem lehet Euler-köre. (4 pont)



Ha vki nem (vagy nem jól) találja meg F-t, de helyesen idézi fel az összefüggő gráfok Euler-köréről szóló szükséges és elégséges feltételt (az összefüggőséget is helyesen beleszőve az idézetbe), az kapjon ezért a részért 3 pontot.

5. Legyen G olyan véges gráf, aminek C egy Hamilton köre. Tegyük fel, hogy a $G-C$ gráfnak van Euler-köre. Mutassuk meg, hogy ekkor a G gráfnak is van Euler-köre.

Mivel a $G-C$ gráfnak van Euler-köre, ezért $(G-C)$-ben minden fokszám páros. (3 pont)
A G gráfban minden fokszám 2-vel nagyobb, mint a $G-C$-beli megfelelő fokszám, hiszen C-ből minden csúcsra pontosan két él illeszkedik. (2 pont)
Ez azt jelenti, hogy G-ben is igaz, hogy minden csúcs foka páros. (1 pont)
A G gráf összefüggő, hiszen C egy Hamilton köre. (1 pont)
A véges összefüggő gráfokról pedig azt tanították, hogy ha minden fokszámuk páros, akkor van Euler-körük. (2 pont)
Ezek szerint G-nek valóban van Euler-köre, ahogyan azt a feladat állítja. (1 pont)

(Ha vki azzal indokolja G összefüggőségét, hogy $(G-C)$-nek van Euler köre, az nem kapja meg az összefüggőségért járó 1 pontot, és aki egyáltalán nem gondol az összefüggőségre, az a tételkimondásért járó 2 pontból is egyet elveszít.)

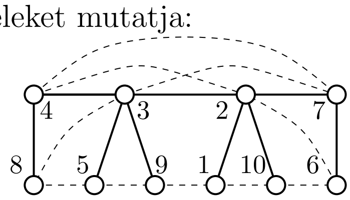
6. Legyen G a $(2,3,7,2,4,3,3,2)$ Prüfer-kódú F fa komplementere. Van-e G-nek Hamilton-köre?

Mivel a Prüfer-kód hossza 8, ezért F-nek 10 csúcsa van. (1 pont)
Tanultuk, hogy a Prüfer-kódban minden csúcs eggyel kevesebbszer szerepel, a fokszámánál, (2 pont)
Ezek szerint F-ben a maximális fokszám a 4. (1 pont)
Mivel G az F komplementere, G-ben a minimális fokszám $9-4=5$ lesz, vagyis G bármely csúcsának fokszáma legalább 5. (2 pont)
Dirac tétele szerint ha egy n csúcsú gráfban minden pont foka legalább $\frac{n}{2}$, akkor G-ben van Hamilton kör. (3 pont)
Ez a tulajdonság fennáll a feladatbeli G gráfra $n=10$-re, tehát a Dirac tétel szerint annak van Hamilton köre, és nekünk pontosan ezt kellett bizonyítanunk. (1 pont)

Lehet persze favágással is.

Az órán tanultak szerint megkonstruáljuk a kérdéses F fát a Prüfer-kódjából. F-nek 10 pontja van, hisz a kód hossza 8. A táblázat alsó sora a letörölt leveleket mutatja:

2	3	7	2	4	3	3	2	$\boxed{10}$
$\boxed{1}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	$\boxed{8}$	$\boxed{4}$	$\boxed{9}$	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$



(5 pont)

Az a kérdés, hogy van-e az F fa összes csúcsát tartalmazó olyan kör, aminek egyik éle sem esik egybe F valamelyik élével. (2 pont)
Ha ügyesek vagyunk, könnyen találunk ilyen kört. Egyet pl szaggatott vonalakkal rajzoltunk az ábrába. (2 pont)
Az tehát a válasz, hogy a G gráfnak van Hamilton köre. (1 pont)

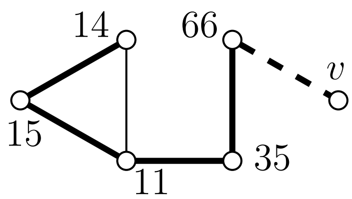
A Számítástudomány alapjai

2. ppZH javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában 1 pontot vonunk le.

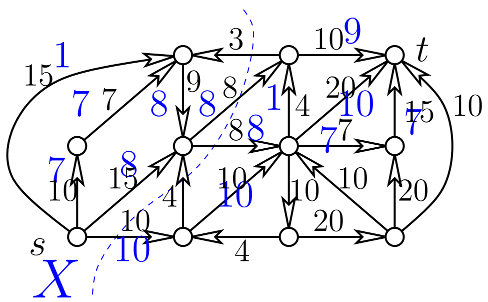
1. Legyen $G = (V, E)$ gráf csúcshalmaza $V = \{11, 14, 15, 35, 66\}$, él pedig akkor fusson két csúcs között, ha azok relatív prímek: $E = \{ij : (i, j) = 1\}$. Határozzuk meg G-nek egy a „15" csúcsból indított szélességi bejárásához tartozó fáját! A G' gráfot úgy kaptuk, hogy G-hez hozzávettünk egy új v csúcsot, amit G bizonyos csúcsaival összekötöttünk. Tudjuk, hogy G'-ben a 15 és v csúcsok távolsága 4. Határozzuk meg G'-t!

   Az ábrán a G egy diagramja látható. (3 pont)
   A „15" csúcsból indított szélességi bejárás a csúcsokat $15, 14, 11, 35, 66$ sorrendben éri el, és a kapott szélességi fát a vastagon rajzolt élek jelzik. (3 pont)
   Ha a v csúcs távolsága a „15" csúcstól 4, az azt jelenti, hogy v-nek van egy a „15" csúcstól 3 távolságra levő szomszédja, és nincs olyan szomszédja, ami legfeljebb 2 távolságra van a „15" csúcstól. (2 pont)
   Mivel G-ben a „15" csúcstól legtávolabb a „65" csúcs található, és ennek 3 a távolsága, a v csúcs csakis ezzel a csúccsal van összekötve G'-ben. (2 pont)



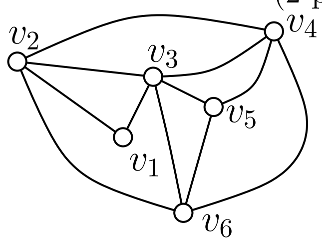
2. Határozzuk meg a mellékelt ábrán látható hálózatban a maximális st-folyam nagyságát.

   Az órán tanult növelő utas algoritmussal kaptuk az ábrán látható folyamot; a nagyobb, kék számok jelzik az egyes éleken a folyam értékét, ahol nincs szám, ott 0 a folyam értéke, azaz nem folyik folyam. (5 pont)
   Ennek a folyamnak a nagysága 26. (2 pont)
   Mivel a szaggatott vonallal jelzett X halmaz által indukált st-vágás 26-os kapacitása felső korlát bármely folyam nagyságára, ezért valóban 26 a keresett folyamnagyság. (3 pont)



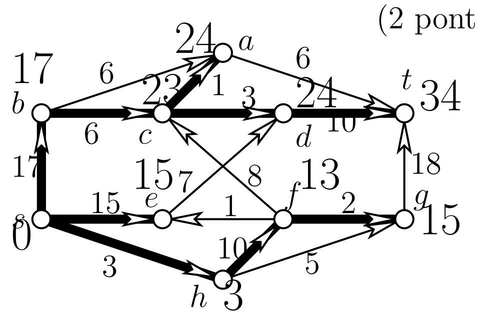
3. Legyen a $G = (V, E)$ gráf csúcshalmaza $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$, élei pedig $E = \{v_i v_j : \frac{(i+j)}{(i-j)} \in \mathbb{Z}\}$. Határozzuk meg a $\nu(G)$, $\tau(G)$, $\alpha(G)$, $\rho(G)$ paramétereket.

   A mellékelt ábrán látható a kérdésben szereplő gráf egy diagramja. (3 pont)
   Mivel G-ben sem izolált pont, sem hurokél nincs, ezért Gallai tételei miatt $\nu(G) + \rho(G) = \alpha(G) + \tau(G) = 6$. (1 pont)
   Mivel v_1v_2, v_3v_5 és v_4v_6 teljes párosítást alkot, ezért $\nu(G) = 3$ (2 pont)
   és (Gallai miatt) $\rho(G) = 3$. (1 pont)
   Másrészt a v_1, v_2 ill a v_3, v_4, v_5, v_6 pontok klikket alkotnak, így egy független ponthalmaz közülük legfeljebb egyet-egyet tartalmazhat. Ezek szerint $\alpha(G) \leq 2$. (1 pont)
   Mivel $\{v_1, v_5\}$ független ponthalmaz, ezért $\alpha(G) = 2$, (1 pont)
   így Gallai miatt $\tau(G) = 4$. (1 pont)



4. Határozzuk meg a mellékelt ábrán látható PERT probléma legrövidebb végrehajtási idejét, és állapítsuk meg, mik a kritikus tevékenységek.

Az órán tanult módszerrel dolgozunk. Először meghatározzuk G egy topologikus sorrendjét, pl. $s, h, f, g, e, b, c, d, a, t$-t. (2 pont)



Ezt követően a csúcsokat ebben a sorrendben dolgozzuk fel, azaz meghatározzuk a legkorábbi kezdési időt, és azt az élt (vagy éleket), ami ezt okozza. Az eredmény az ábrán látható. (5 pont)

Ezek szerint a legrövidebb végrehajtási idő $t = 34$, (1 pont)
és mivel egyetlen kritikus út vezet s-ből t-be, a kritikus tevékenységek ezen út csúcsai, azaz s, b, c, d, t. (2 pont)

5. Tegyük fel, hogy a G egyszerű gráfnak 11 csúcsa van és síkbarajzolható. Igazoljuk, hogy a $\overline{G}$ komplementergráf nem síkbarajzolható.

Tanították, hogy egy n csúcsú, egyszerű, sr gráfnak $n > 3$ esetén legfeljebb $3n - 6$ éle lehet. (3 pont)
Jelen esetben ez azt jelenti, hogy G-nek legfeljebb $3 \cdot 11 - 6 = 27$ éle lehet. (3 pont)
Ezért aztán $\overline{G}$ élszáma legalább $\binom{11}{2} - 27 = 55 - 27 = 28$ lesz, (3 pont)
tehát az elsőnek idézett ok miatt $\overline{G}$ nem síkbarajzolható. (1 pont)

6. Határozzuk meg, hogy a 3^{33} szám kettes számrendszerben felírt alakjának mi az utolsó hat jegye!

Azt kell megállapítanunk, hogy 3^{33} milyen maradékot ad 2^6-tal osztva, és hogy ezt a maradékot kell felírnunk kettes számrendszerben. (3 pont)
Mivel $(3, 2^6) = 1$, (1 pont)
és $\varphi(2^6) = (2-1) \cdot 2^5 = 32$, (1 pont)
ezért alkalmazhatjuk az Euler-Fermat tételt, ami szerint $3^{\varphi(2^6)} = 2^{32} \equiv 1(2^6)$ (2 pont)
Innen $3^{33} = 3^{32} \cdot 3 \equiv 1 \cdot 3 = 3(2^6)$ (2 pont)
tehát 3^{33} utolsó hat jegye 2-es számrendszerben $\ldots 000011$. (1 pont)