A Számítástudomány alapjai

1. ZH javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában 1 pontot vonunk le.

1. A 15 fős képviselőtestület választásra 5 párt állít egy-egy 15 fős listát. A szavazást követően mindegyik párt a listája elejéről az elért eredményének megfelelő számú képviselőt küld a testületbe, úgy, hogy a testület összesen 15 fős legyen. Hányféle lehet a képviselőtestület összetétele a szavazás után?

   A képviselőtestület összetétele annyiféle lehet, ahányféleképp a 15 képviselői helyet el lehet osztani 5 párt között. (2 pont)
   Mind a 15 helyre 5-féle pártból lehet választani, a helyek sorrendje pedig nem számít, (2 pont)
   ezért 5 elem 15-ödosztályú ismétléses kombinációjáról van szó. (3 pont)
   Az órán tanultak szerint ilyenből $\binom{19}{4}$ van, és ez a válasz a feladat kérdésére is. (3 pont)

2. Tegyük fel, hogy az F fának csak első- és negyedfokú csúcsai vannak, szám szerint n_1 ill. n_4. Igazoljuk, hogy $n_1 = 2 \cdot n_4 + 2$.

   Tanultuk, hogy minden véges gráfban a fokszámösszeg az élszám kétszerese, (3 pont)
   továbbá, hogy egy n csúcsú fának pontosan $n-1$ éle van. (2 pont)
   Ez F-re nézve azt jelenti, hogy $n_1 + 4n_4 = 2n - 2$, ahol $n = n_1 + n_4$ a G csúcsainak száma. (2 pont)
   Innen azt kapjuk, hogy $n_1 + 4n_4 = 2(n_1 + n_4) - 2$, (2 pont)
   amit rendezve éppen a bizonyítandó állítást kapjuk: $n_1 = 2 \cdot n_4 + 2$. (1 pont)

3. Tegyük fel, hogy a G gráf 3-szorosan élösszefüggő és létezik Euler-körsétája. Mutassuk meg, hogy G 4-szeresen élösszefüggő.

   A G gráf 3-élöf, ezért legfeljebb két élét elhagyva mindenképp összefüggő marad. (2 pont)
   Mivel G-nek van Euler-körsétája, a tanultak szerint G minden csúcsának páros a fokszáma. (2 pont)
   Azt kell igazolnunk, hogy G 4-élöf, azaz bárhogyan is hagyunk el G-ből legfeljebb 3 élt, G-nek összefüggőnek kell maradnia. (2 pont)
   Tegyük fel indirekt, hogy ez nem így van, ami azt jelenti, hogy valahogyan elhagyható G-ből 3 él úgy, hogy G ettől szétessen. (1 pont)
   Ha az ekkor keletkező komponensek egyikében a csúcsokat egy ponttá húzzuk össze, akkor olyan gráfot kapunk, amiben minden csúcs foka páros, kivéve az összehúzott csúcsét, aminek 3 a foka. (2 pont)
   Ez azonban lehetetlen, hiszen tanultuk, hogy a fokszámösszeg minden véges gráfban páros, így a páratlan fokú csúcsok száma semmiképp sem lehet pontosan egy. A kapott ellentmondás a feladat állításának helyességét bizonyítja. (1 pont)

4. Legyenek az F fa csúcsai az $v_1, v_2, \ldots, v_{10}$, élei pedig $v_i v_{i+1}$, ha $1 \le i \le 4$ ill. $v_5 v_j$, ha $6 \le j \le 10$. Tegyük fel, hogy F a G egyszerű gráf v_1-ből indított szélességi bejárásához tartozó fa. Legfeljebb hány éle lehet G-nek?

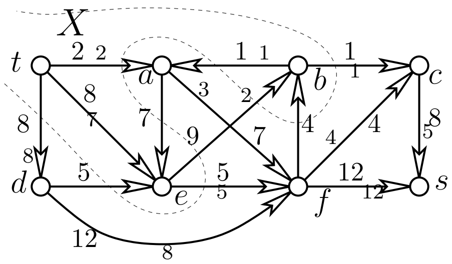
   Tanultuk, hogy az F fában minden v_1-ből vezető út a G gráfnak egy legrövidebb útja az adott csúcsba. (2 pont)
   Ez azt jelenti, hogy a $v_1, v_2, \ldots, v_5$ pontokból nem indulhat további éle G-nek, hiszen ekkor valamelyik csúcsba vezetne v_1ből rövidebb út, mint a fabeli. (3 pont)
   A G gráfnak tehát csak a $v_6, v_7, \ldots, v_{10}$ csúcsok között vezethet további éle. (1 pont)
   Ezen csúcsok közé bárhogy is húzunk be további éleket, az F fa az így kapott G gráf szélességi bejáráshoz tartozó fája marad. (2 pont)

Mivel 5 csúcs közé $\binom{5}{2} = 10$ él húzható, a G gráfnak legfeljebb $10 + 9 = 19$ éle lehet, ahol a 9 az F élszáma. (2 pont)

5. Baj van: átszakadt a hegytetőn a zagytározó gátja. Szerencsére az iszap nem veszélyes, slaggal lemosható. Az mellékelt ábrán t jelzi a tározót, s pedig a szerencsétlen helyen fekvő várost, amit meg kell védeni. A nyilak arra vezetnek, amerre az adott mélyedésben folyik a zagy. (Furcsa errefelé a gravitáció: megtörténhet, hogy végig lejt egy a kiindulópontjába visszatérő útvonal.) A nyíl mellett álló számok azt mutatják, hogy a katasztrófavédelemnek hány percig tart elzárni az adott nyíl mentén lezúduló folyadék útját. Az a cél, hogy a lehető legrövidebb idő alatt minden lehetséges s-be vezető utat lezárjunk az arra áramló melléktermék elől. Mivel csak egy munkagép működik, ezért a kiválasztott útvonalakat csak egymás után zárhatjuk le. Segítsünk a katasztrófavédelemnek: határozzuk meg, mennyi a szükséges legrövidebb idő, ami alatt a munka elvégezhető. Bizonyítsuk be azt is, hogy kevesebb idő nem elég minderre.

Ha a feladathoz tartozó ábra gráfját hálózatként értelmezzük, akkor az a célunk, hogy ebben a hálózatban minimális kapacitású ts-vágást találjunk. (A ts-vágás kapacitását (szemben az st-vágással a t-t tartalmazó rész felől az s-t tartalmazó rész felé mutató élek összkapacitása adja.) (3 pont)
A minimális ts-vágás meghatározását a hálózat egy maximális folyamának megkeresésével az órán tanult módon végeztük el. (3 pont)
Azt kaptuk, hogy az ábrán szaggatottal jelölt vágás kapacitása 17, az apróbb számokkal jelölt folyam nagysága pedig 17. (Amelyik élen nincs más szám a kapacitáson kívül, ott nem folyik folyam, azaz $f(e) = 0$.) (2 pont)
A folyam létezése miatt bármely ts-vágás kapacitása legalább 17. Ezek szerint valóban minimális ts-vágást találtunk, (1 pont)
így a válasz az, hogy a katasztrófavédelemnek legalább 17 percre van szüksége, (1 pont)
és ehhez a kijelölt ts-vágás t-től s felé futó éleket kell lezárni. (0 pont)

Ez egy gonosz feladat: nemcsak azért, mert az s és t szerepe felcserélődött, hanem amiatt is, hogy a folyamnak (ami a vágás minimalitását bizonyítja) nincs szemléletes jelentése, szemben a megszokott modellel, aholis vmi termék áramlik.



6. Legyenek a G irányítatlan gráf csúcsai az $1, 2, \ldots, 100$ számok, az i és j csúcs között pedig akkor fusson él, ha $j < i$ esetén az $i - j$ szám 4-gyel osztva 1-et ad maradékul. Páros-e a G gráf?

Ha i és j között él fut, akkor i és j közül pontosan az egyik páros, a másik páratlan. (3 pont)
Ez azt jelenti, hogy se két páros szám, se két páratlan szám között nem futhat él, (3 pont)
így G valóban páros: a színosztályokat a 100-nál nem nagyobb páros ill. páratlan pozitív egészek alkotják. (4 pont)

Meg lehet persze másképp is oldani.
Sosem fut él két csúcs között akkor, ha azok 4-gyel osztva ugyanannyi maradékot adnak. (2 pont)
Két különböző maradékosztály között pedig csak akkor futhat él, ha a maradékok különbsége 1 vagy a 0-ás és a 3-as maradékosztályról van szó. (2 pont)
A G gráf tehát páros, hiszen az 1-es és 3-as ill. a 2-es és 0-ás maradékosztály között nem vezet él, és ezek adják a színosztályokat. (6 pont)

Bevezetés a Számításelméletbe I.

2. ZH javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában 1 pontot vonunk le.

1. A faluban $2n$ lány és $2n$ fiú él. A lányoknak –akik párosával testvérek, és nem rokonai a fiúknak– az a céljuk, hogy úgy házasodjanak össze a falubeli fiúkkal, hogy minden lány le tudja nyomni a férjét szkanderban. Tudjuk, hogy az i-dik lánytestvérpár bármelyik tagja képes legalább $2i-1$ fiút szkanderban legyőzni, ráadásul minden lány le tud győzni olyan fiút is, akit a testvére nem. Mutassuk meg, hogy lehetséges a kívánt házasítás!

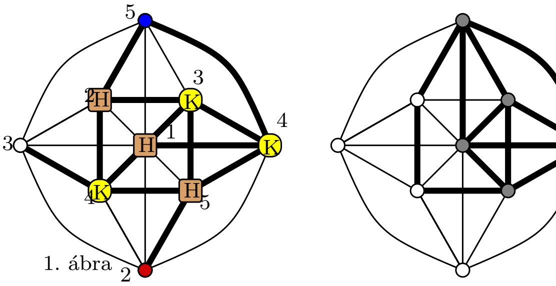
   Legyen G az a páros gráf, aminek A és B színosztályát a lányok ill. a fiúk alkotják, és egy lány ill. fiú között akkor fut él, ha az adott lány lenyomja az adott fiút szkanderban. (2 pont)
   Azt kell bizonyítanunk, hogy G-ben létezik teljes párosítás. (1 pont)
   Ehhez a tanult Frobenius tételt használjuk, azaz egyrészt azt kell ellenőriznünk, hogy a két színosztály mérete azonos (ami azonnal adódik a definícióból), (2 pont)
   másrészt a Hall feltétel teljesülését kell igazolunk. (1 pont)
   Az kell tehát, hogy bárhogyan is választok ki k lányt, legalább k olyan fiú van, amit a kiválasztott k lány valamelyike képes szaknderban legyőzni. (1 pont)
   Tegyük fel, hogy valamelyik lányt az i-dik testvérpárból választottuk, az összes többi kiválasztott lány pedig az első i testvérpárból való. Ekkor legfeljebb $2i$ lányt választottunk ki, azaz $k \leq 2i$. Ha $k < 2i$, akkor $k \leq 2i-1$, és az i-dik testvérpárból választott lány már önmagában legyőz $2i-1$ fiút, ezért a Hall feltétel teljseül ebben az esetben. (1 pont)
   Ha azonban $k = 2i$, akkor pontosan az első i testvérpárt választottuk ki, és az i-dik testvérpár egyik tagja legyőz $2i-1$ fiút, a testvére egy további fiút, így az i-dik testvérpár legalább $2i = k$ fiút győz le. (1 pont)
   A Hall feltétel tehát teljesül, valóban létezik teljes párosítás, azaza lehetséges a kívánt házasítás. (1 pont)

   Létezik közvetlen bizonyítás is, ami nem használja a Hall feltételt.

   Az 1. testvérpárból választunk férjet az egyik lánynak. Mivel a testvére képes legyőzni olyan fiút, akit a most házasított testvére nem, ennek a testvérnek is jut férj. (2 pont)
   Tegyük fel, hogy az első $i-1$ testvérpárt már sikerült házasítani, azaz a szóban forgó $2i-2$ lánynak már van férje. Az i-dik testvérpár bármelyike legyőz $2i-1$ fiút, ráadásul ketten együtt már legalább $2i$ fiút győznek le. (2 pont)
   Tehát van legalább két egyelőre nőtlen fiú, akiket az i-dik testévpárból valamelyik legyőz. Ha két olyan fiú is van, akiket az i-dik testvérpár mindkét tagja legyőz, akkor ezzel a két fiúval házasítható az i-dik testvérpár is. (2 pont)
   Ha nincs két ilyen fiú, akkor van olyan fiú, akit a két nővérnek csak az egyike győz le. Ha ők összeházasodnak, akkor a másik nővér altal legyőzött fiúk közül legfeljebb csak $2i-2$ nős, marad tehát ennek a lánynak is olyan férj, akivel kedvére edzhet. (2 pont)
   Azt kaptuk, hogy ha $i-1$ testvérpár megházasodott, akkor az i-diknek is találhatók férjek, és ebből közvetlenül következik a feladat állítása. (2 pont)

2. Határozzuk meg az 1. ábrán látható G gráf $\nu(G)$ és $\rho(G)$ paramétereit.

   A G gráf 9 csúcsú, tehát 4-nél több független él nem található G-ben, (2 pont)
   azaz $\nu(G) \leq 4$. (1 pont)
   Másrészt 4 független él található, pl az ábrán látható módon. (2 pont)
   Innen $\nu(G) \geq 4$ következik, (1 pont)
   és ezt az előzővel összevetve $\nu(G) = 4$. (1 pont)
   Gallai tanult tétele szerint, ha G-ben nincs izolált pont, akkor $\nu(G) + \rho(G) = |V(G)|$, (2 pont)
   azaz $\rho(G) = 9 - 4 = 5$. (1 pont)



1. ábra

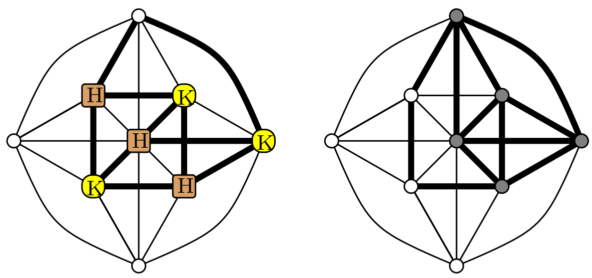
3. Határozzuk meg az 1. ábrán látható G gráf $\chi(G)$ kromatikus számát.

   A G gráf kiszínezhető 5 színnel, pl az ábrán látható módon. (3 pont)
   Innen $\chi(G) \leq 5$. (1 pont)
   Ha $\chi(G) < 5$, akkor az azt jelenti, hogy G 4 színnel kiszínezhető. (1 pont)
   Mivel a középső csúcs színét egyetlen más csúcs sem kaphatja, ezért a többi csúcsra ekkor 3 szín jut. (2 pont)

   Ezen csúcsok egymáshoz csatlakozó háromszögeket alkotnak, így ha az egyik háromszöget kiszínezük a szükséges 3 színnel, akkor a szomszédos háromszögek színezése egyértelműen adódik, ám körbeérve szomszédos csúcsokat azonos színűre kellene festenünk. (2 pont)
   Ez nem lehetséges, vagyis 4 szín nem elegendő G kiszínezésére, tehát $\chi(G) = 5$. (1 pont)

4. Síkbarajzolható-e az 1. ábrán látható gráf?

   A G gráf nem síkbarajzolható, ugyanis az ábrán látható módon tartalmazza részgráfként a $K_{3,3}$ gráf soros bővítését (ami persze topologikusan izomorf $K_{3,3}$-mal). (7 pont)
   Márpedig tanultuk, hogy sem a $K_{3,3}$ gráf, sem annak soros bővítése sem síkbarajzolható, tehát ezen gráfot részgráfként tartalmazó gráf sem lehet az. Speciálisan a G sem. (3 pont)



   A fenti elmondható K_5-tel is, mert annak a soros bővítését is tartalmazza G, ahogy az ábrán látható.
   További lehetséges megoldás:

   A G gráf egyszerű és 9 pontja van, ezért ha síkbarajzolható, akkor a tanultak szerint legfeljebb $3 \cdot 9 - 6 = 21$ éle lehet. (5 pont)
   Ezzel szemben G-nek 24 éle van, tehát G nem síkbarajzolható. (5 pont)

   Avagy:

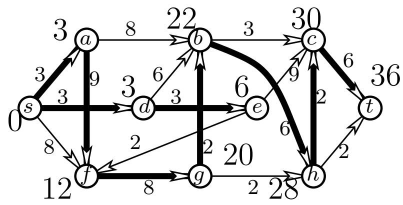
   Az előző feladatban bizonyítottuk, hogy $\chi(G) = 5$. (2 pont)
   A 4-szín tétel szerint ha G síkbarajzolható, akkor $\chi(G) \leq 4$. (4 pont)
   Ennek alapján G nem lehet síkbarajzolható (4 pont)

   Ha az előző feladatra nem volt jó a megoldás, akkor csak a középső 4 pont jár.

5. Határozzuk meg a 2. ábrán látható PERT feladathoz tartozó legrövidebb végrehajtási időt és a kritikus tevékenységeket.

   Az $s, a, d, e, f, g, b, h, c, t$ sorrend a csúcsok egy topologikus sorrendje. Ebben a sorrendben dolgozzuk fel a gráf csúcsait. (3 pont)

Az ábrán látható módon meghatároztuk az egyes tevékenységek legkorábbi kezdési időpontjait, és megjelöltük azokat az éleket, amik ezeket a legkorábbi időpontokat meghatározzák. (4 pont)
Azok a kritikus tevékenységek, amik rajta vannak egy megjelölt élekből álló st úton, (1 pont)
konkrétan az s, a, f, g, b, h, c és t tevékenységek, (1 pont)
és 36 egységnyi idő kell a PERT feladat optimális ütemezés melletti végrehajtásához. (1 pont)



6. Igazoljuk, hogy a P és NP problémaosztályba egyaránt beletartozik annak eldöntése, hogy egy inputként megadott G irányítatlan gráfban létezik-e két különböző kör.

Az NP-beliséghez azt kell megmutatni, hogy „igen” válasz esetén (tehát ha van a gráfban két különböző kör) van hatékonyan (az inputméret polinomjával korlátozható számú lépésben) ellenőrizhető bizonyíték. (1 pont)
Jelen esetben két különböző kör megadása ilyen, mert mindegyik körről hatékonyan eldönthető, hogy részgráf, kör, és hogy egymástól különböznek. (2 pont)
A P-beliséghez azt kell igazolnunk, hogy van a problémára polinom idejű algoritmus. (1 pont)
Tudjuk, hogy a BFS vagy a DFS mindegyike polinom idejű, és a megadott gráf minden komponensében egy-egy feszítőfát talál. (2 pont)
Világos, hogy G minden egyes éle meghatároz egy-egy alapkört a feszítőfa bizonyos éleivel együtt. (1 pont)
Ha tehát G-nek van legalább 2 olyan éle, ami nem éle a bejárási fának, akkor „igen” a válasz. (1 pont)
Ha legfeljebb egy ilyen él van, akkor G-nek nincs más köre az alapkörön kívül, így „nem” a válasz. (1 pont)
A döntési problémára tehát létezik polinom idejű algoritmus, azaz a probléma valóban P-beli. (1 pont)

Az NP-beliség igazolható másképp is.

Tudjuk, hogy $P \subseteq NP$, ezért elegendő megmutatni, hogy a vizsgált probléma P-beli, ebből az NP-beliség közvetlenül következik. (3 pont)

A Számítástudomány alapjai

1. pZH javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában 1 pontot vonunk le.

1. Bizonyítsuk be, hogy $\binom{\binom{n}{2}}{2} = 3\left(\binom{n}{4} + \binom{n}{3}\right)$ teljesül minden pozitív egész n számra.

   A baloldalon álló mennyiség azt számlálja le, hogy egy n csúcsú (és ilyenformán $\binom{n}{2}$ éllel rendelkező) gráfból hányféleképp lehet két különböző élt kiválasztani. (2 pont)
   Két különböző él összesen 3 vagy 4 különböző végpontot határoz meg. (2 pont)
   Ha 4 végpont adott, akkor ezeken 3-féleképp lehet 2 élt úgy kiválasztani, hogy mind a 4 végpontot felhasználjuk. (2 pont)
   Ha pedig 3 pont van megadva, akkor az azok között futó 3 élből szintén 3-féleképp választhatunk ki kettőt. (2 pont)
   Ezek szerint a vizsgált kifejezés jobboldala is éppen azt számolja meg, hogy hányféleképp lehet a K_n-ből két különböző élt kiválasztani. Ezzel a feladat állítását igazoltuk. (2 pont)

   Lehet persze favágással is.

   A baloldali kifejezést kifejtve kapjuk, hogy $\binom{\binom{n}{2}}{2} = \binom{\frac{n(n-1)}{2}}{2} = \frac{1}{2}\frac{n(n-1)}{2}\cdot\left(\frac{n(n-1)}{2}-1\right) = \frac{1}{8}n(n-1)\left(n(n-1)-2\right) = \frac{1}{8}(n^2-n)(n^2-n-2) = \frac{1}{8}(n^4-2n^3-n^2+2n)$. (4 pont)
   A jobboldali kifejezéssel is megküzdünk: $3\left(\binom{n}{4}+\binom{n}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{4!}n(n-1)(n-2)(n-3)+\frac{1}{3!}n(n-1)(n-2)\right) = 3\left(\frac{1}{24}(n^4-6n^3+11n^2-6n)+\frac{1}{6}(n^3-3n^2+2n)\right) = \frac{1}{8}\left(n^4-6n^3+11n^2-6n+4(n^3-3n^2+2n)\right) = \frac{1}{8}(n^4-2n^3-n^2+2n)$, (4 pont)
   ami bámulatosan egyezik a korábban kiszámolt kifejezéssel, így a feladatbeli azonosságot szerencsésen igazolja. (2 pont)

2. Legyenek a G irányítatlan gráf csúcsai az $1, 2, \ldots, 100$ számok, az i és j csúcs között pedig akkor fusson él, ha $j < i$ estén az $i - j$ szám 5-tel osztva 1-et ad maradékul. Páros-e a G gráf?

   Világos, hogy az 1 és 2, a 2 és 3, a 3 és 4, a 4 és 5, az 5 és 6, a 6 és 7, valamint a 7 és 1 között él fut, a G gráf definíciója alapján. (3 pont)
   Ezek az élek éppen egy 7 hosszú kört alkotnak G-ben, (3 pont)
   márpedig azt tanultuk, hogy páros gráfban nem létezhet páratlan kör. (3 pont)
   Ezek szerint G nem páros gráf. (1 pont)

3. Egy 12 egység hosszú drótból szeretnénk elkészíteni egy egységkocka élvázát, úgy, hogy a kocka csúcsainál forrasztunk. Legkevesebb hány darabra kell felvágni ehhez az eredeti drótunkat? Mi a válasz akkor, ha a testátlóknak is benne kell lenniük az élvázban, és persze a kiindulási drótunk is 4 testátlónyival hosszabb?

   Feleljen meg a G gráf az egységkocka (ill. a testátlókkal ellátott kocka) élhálójának. Ha valahogyan elkészítjük drótokból az élvázat, akkor minden drótdarab a gráf egy sétájának felel meg úgy, hogy G minden egyes éle pontosan az egyik sétához tartozik. Azt kell tehát meghatároznunk, mi a legkisebb számú séta, amire G élhalmaza felbontható. (1 pont)
   A G gráf minden páratlan fokú csúcsában véget kell érnie legalább egy drótnak. (2 pont)
   Ha G a kockának felel meg, akkor mind a 8 csúcsának a foka 3, (1 pont)
   így legalább 4 drótdarab kell, hogy legyen 8 drótvégünk. (1 pont)
   Az is világos, hogy 4 drótdarab elég: pl a fedőlap egy függőleges éllel, az alsó lap egy függőleges éllel

egy-egy drótból meghajtható, és a maradék két függőleges élhez is kell egy-egy egységnyi hosszú drót. (1 pont)

Ha G a testátlókat is tartalmazza, akkor mind a 8 csúcs páros fokú. (1 pont)
Ráadásul G összefüggő is, (1 pont)
ezért van Euler-körsétája. (1 pont)
A tanult tétel miatt tehát vanz Euler körsétája, és a drótot e mentén meghajogatva látjuk, hogy nincs szükség ebben az esetben darabolásra. (1 pont)

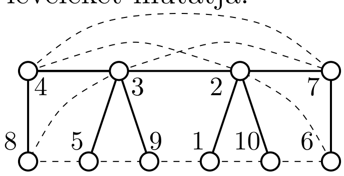
4. Legyen G a $(2, 3, 7, 2, 4, 3, 3, 2)$ Prüfer-kódú F fa komplementere. Van-e G-nek Hamilton-köre?

Mivel a Prüfer-kód hossza 8, ezért F-nek 10 csúcsa van. (1 pont)
Tanultuk, hogy a Prüfer-kódban minden csúcs eggyel kevesebbszer szerepel, a fokszámánál, (2 pont)
Ezek szerint F-ben a maximális fokszám a 4. (2 pont)
Mivel G az F komplementere, G-ben a minimális fokszám $9 - 4 = 5$ lesz, vagyis G bármely csúcsának fokszáma legalább 5. (1 pont)
Dirac tétele szerint ha egy n csúcsú gráfban minden pont foka legalább $\frac{n}{2}$, akkor G-ben van Hamilton kör. (3 pont)
Ez a tulajdonság fennáll a feladatbeli G gráfra $n = 10$-re, tehát a Dirac tétel szerint annak van Hamilton köre, és nekünk pontosan ezt kellett bizonyítanunk. (1 pont)

Lehet persze favágással is.

Az órán tanultak szerint megkonstruáljuk a kérdéses F fát a Prüfer-kódjából. F-nek 10 pontja van, hisz a kód hossza 8. A táblázat felső sora a letörölt leveleket mutatja:

1	5	6	7	8	4	9	3	2
2	3	2	2	5	3	5	2	10

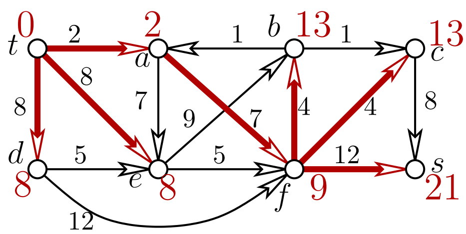


(5 pont)

Az a kérdés, hogy az F fa 10 csúcsán van-e olyan kör, aminek egyik éle sem esik egybe F valamelyik élével. (2 pont)
Ha ügyesek vagyunk, könnyen találunk ilyen kört. Egyet pl szaggatott vonalakkal rajzoltunk az ábrába. (2 pont)
Az tehát a válasz, hogy a G gráfnak van Hamilton köre. (1 pont)

5. Határozzuk meg az ábrán látható gráfban a legrövidebb út hosszát s-ből t-be a Dijkstra algoritmus segítségével, és adjuk meg a csúcsoknak azt a sorrendjét, ahogyan megállapítjuk a távolságokat.

A Dijkstra algoritmust a tanultak szerint végrehajtva s, a, d, e, f, b, c, t sorrendben vesszük be a csúcsokat az S halmazba, aholis azok a csúcsok vannak, amiknek a s-től való távolságát már megállapítottuk. (Helyes az a sorrend is, ahol a d, e vagy a b, c pontok sorrendje fordított. (5 pont)
Az ábrán látható az algoritmus futása után kapott eredmény, ahonnan az látszik, hogy t távolsága s-től pontosan 21. (5 pont)



6. A mellékelt ábrán látható hálózatban a 12 kapacitású df él elromlott, kapacitása 0 lett. Határozzuk meg a kapott hálózatban a maximális st folyam nagyságát. Kiderült közben, hogy a kiesett élt egy p kapacitású éllel tudjuk pótolni. Határozzuk meg, hogyan függ a maximális nagyságú st folyam nagysága a p paraméter értékétől!

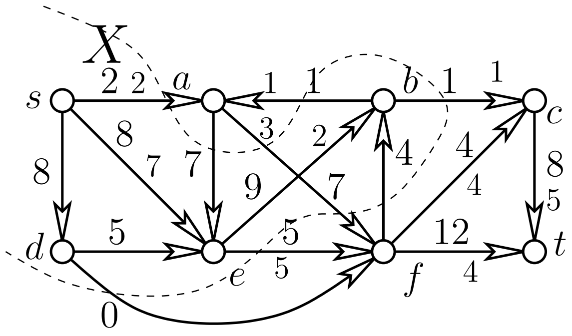
Az az első feladat, hogy $p = 0$-ra határozzunk meg egy maximális nagyságú folyamot. Ezt az órán tanultak szerint végezzük, a folyam maximalitását egy folyamnagysággal azonos kapacitású vágással igazoljuk. (3 pont)
Az 1. ábrán látható a megoldás, egy 9 értékű folyam és egy ugyanilyen kapacitású st-vágás, amit a jelölt X halmaz határoz meg. (A kisebben szedett számok a folyam nagyságát mutatják az adott élen,

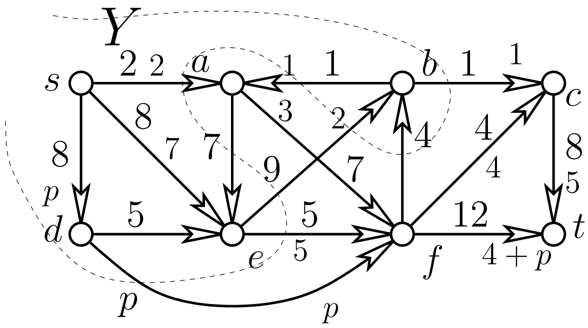
ahol nincs ilyen szám, ott nem folyik folyam. (3 pont)

Ebben a folyamban most elkezdünk a p kapacitású él segítségével további növelő utakat keresni. Találunk is egyet, amin növelve $p \leq 8$ esetén egy $9 + p$ nagyságú folyamot kapunk. (2 pont)

Az Y által meghatározott st-vágás mutatja, hogy ennél nagyobb folyam nem lehetséges. (1 pont)

Hátra van még a $p > 8$ eset. Ekkor az $Y \setminus \{d\}$ olyan st vágást határoz meg, aminek a kapacitása 17, azaz $p > 8$ esetén a 17 nagyságú folyam elérhető, de ennél nagyobb nem lehetséges. (1 pont)





Bevezetés a Számításelméletbe I.

2. pZH javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában 1 pontot vonunk le.

1. Bizonyítsuk be, hogy ha $G = (A, B; E)$ páros gráf és $a \in A, b \in B$ esetén $d(a) \geq d(b) \geq 1$, akkor van G-ben A-t fedő párosítás.

   A tanult Hall tétel szerint pontosan akkor van G-ben A-t fedő párosítás, ha teljesül a Hall feltétel, (2 pont)
   azaz tetszőleges $X \subseteq A$-ra $|N(X)| \geq |X|$. (1 pont)
   Ezt fogjuk tehát ellenőrizni. A feltétel szerint létezik olyan $c \geq 1$ egész szám, amire $d(a) \geq c \geq d(b)$ teljesül minden $a \in A$ és $b \in B$ csúcsra. (1 pont)
   Jelölje $E(X)$ az X-ből induló élek halmazát. Világos, hogy $c \cdot |X| \leq |E(X)| \leq c \cdot |N(X)|$, hiszen minden X-beli csúcsból legalább c különböző él indul, míg egy $N(X)$-beli csúcsra pedig legfeljebb c $E(X)$-beli él illeszkedhet. (4 pont)
   Mivel $c \neq 0$ ezért bátran leoszthatunk: $|X| \leq |N(X)|$, (1 pont)
   azaz teljesül a Hall feltétel, csakugyan létezik G-ben A-t fedő párosítás. (1 pont)

2. Mutassuk meg, hogy ha a G gráfnak 2010 csúcsa van, és $\alpha(G) = 100$, akkor $\chi(G) \geq 21$.

   Tegyük fel, hogy a G gráf kiszínezhető k színnel. Mivel a k színosztály mindegyike független halmaz, ezért minden színosztály legfeljebb $\alpha(G)$ csúcsot tartalmazhat. (2 pont)
   A k színosztály lefedi G minden csúcsát, ezért $k \cdot \alpha(G) \geq |V(G)|$. (2 pont)
   A konkrét esetben ez azt jelenti, hogy $100k \geq 2010$, (2 pont)
   ahonnan $k \geq 2010/100 > 20$. (1 pont)
   Ez azt jelenti, hogy G kiszínezéséhez 20-nál több, azaz legalább 21 szín kell, (2 pont)
   ami pontosan azt jelenti, hogy $\chi(G) \geq 21$, és épp ezt kellett bizonyítanunk. (1 pont)

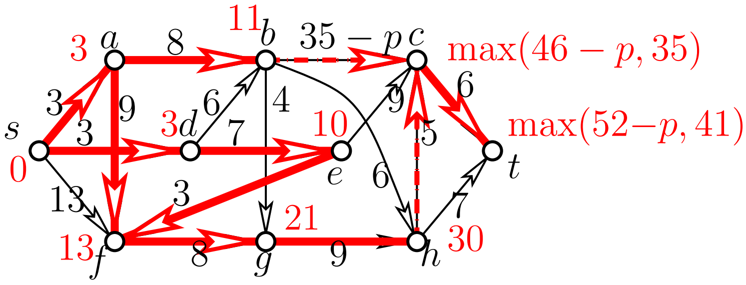
3. Igazoljuk, hogy ha $G = (V, E)$ egyszerű gráf és minden fokszáma 12, akkor nem léteznek olyan $G_1 = (V, E_1)$ és $G_2 = (V, E_2)$ síkbarajzolható gráfok, amire $E = E_1 \cup E_2$, azaz G nem áll elő két síkbarajzolható gráf uniójaként.

   Jelölje n a G gráf csúcsainak, m pedig az éleinek a számát. Ha a G gráf minden csúcsából 12 él indul, akkor $12n = 2e$, azaz $e = 6n$, (3 pont)
   hiszen a fokszámösszeg éppen az élszám kétszerese a tanultak szerin. (1 pont)
   Azt is tanították, hogy ha egy n csúcsú egyszerű gráfnak legalább 3 csúcsa van és síkbarajzolható, akkor az éleinek száma legfeljebb $3n - 6$. (3 pont)
   Márpedig ha a G gráf (aminek az egyszerűség és a 12 fokszám miatt legalább 13 csúcsa van) két síkbarajzolható gráf uniója volna, akkor G-nek legfeljebb kétszer annyi éle lehetne, mint egy síkbarajzolható gráfnak, (1 pont)
   konkrétan legfeljebb $2(3n - 6) = 6n - 12$. (1 pont)
   Láttuk, hogy a G gráfnak ennél több éle van, így valóban nem lehet G két sr gráf uniója. (1 pont)

4. Sürgősen el kell fogadni a korrupcióellenes törvényt. Ennek érdekében különféle egyeztetéseket és vitákat kell lefolytatni, amik csak bizonyos sorrendben követhetik egymást. A mellékelt ábrán látható gráf csúcsai jelentik az egyes cselekményeket, a nyilak pedig a korábban végrehajtandó cselekményből olyanokba mutat, amik azt nem előzhetik meg, sőt, a két cselekmény megkezdése között el kell telnie a nyíl mentén megadott számú napnak. A p paraméter az illetékes bizottság arról való „meggyőzésének”

a költsége, hogy adott időn belül hagyják jóvá a javaslatot. Mennyibe kerül a törvény 42 napon belüli elfogadása?

Az $s, a, d, e, f, b, g, h, c, t$ sorrend a csúcsok egy topologikus sorrendje. Ebben a sorrendben dolgozzuk fel a gráf csúcsait. (3 pont)
Az ábrán látható módon meghatároztuk az egyes tevékenységek legkorábbi kezdési időpontjait, és megjelöltük azokat az éleket, amik ezeket a legkorábbi időpontokat meghatározzák. A c és t csúcsoknál mind a kezdési időpont, mind az ezt meghatározó él függ a p paramétertől. (4 pont)
Az kell tehát nekünk, hogy $\max(41, 52-p) \leq 42$ legyen, azaz $52 - p \leq 42$, vagyis $p \geq 10$. (1 pont)



Az időbeni elfogadás költsége tehát legalább 10. (1 pont)
Ha pedig rászánjuk erre a 10 költséget, akkor el is fogadható a törvény ennyi idő alatt. (1 pont)
Ekkor a kritikus tevékenységek azok, amik a $p = 10$-hez tartozó kritikus utak valamelyikén vannak, azaz az s, a, b, c és t lesznek. (0 pont)

Ha vkinek a „42 napon belül” legfeljebb 41 napot jelent, és ezért $p = 11$ jön ki, azt is fogadjuk el helyesnek.

5. Legyenek az F fa csúcsai az $v_1, v_2, \ldots, v_{10}$, élei pedig $v_i v_{i+1}$, ha $1 \leq i \leq 4$ ill. $v_5 v_j$, ha $6 \leq j \leq 10$. Tegyük fel, hogy F a G egyszerű, irányítatlan gráf v_1-ből indított mélységi (DFS) bejárásához tartozó fa. Legfeljebb hány éle lehet G-nek?

   Tanították, hogy a mélységi bejárás fájához nem tartoznak keresztélek, azaz olyan élek, amik a fa olyan csúcsait kötik össze, amik nem leszármazottai egymásnak. (3 pont)
   Ezek szerint G-ben nem futhat él a $v_6, v_7, \ldots, v_{10}$ pontok között. (2 pont)
   A G gráfnak tehát nem lehet több éle, mint annak a gráfnak, amit 10 pontú teljes gráfból úgy kapunk, hogy elhagyjuk a fenti 5 pont közt futó éleket. (2 pont)
   Az élszám tehát legfeljebb $\binom{10}{2} - \binom{5}{2} = 45 - 10 = 35$ lehet. (1 pont)
   Ennyi éle pedig lehet is G-nek. Ha ugyanis G pontosan a fent leírt gráf, akkor a megadott F lehet a G mélységi fája. (2 pont)

   A fa helyes lerajzolásáért adjunk 1 pontot, ha nincs más értékelhető teljesítmény.

6. Legyen a Π döntési probléma inputja egy összefüggő G gráf, az output pedig pontosan akkor „igen”, ha van G-ben Euler-körséta. Mutassuk meg, hogy $\Pi \in co-NP$.

   Azt kell megmutatni, hogy tetszőleges összefüggő gráfra hatékonyan rá tudjuk bizonyítani az Euler-körséta nemlétét, már persze amennyiben nincs benne ilyen. (3 pont)
   Azt tanították valaha, hogy egy véges, összefüggő G gráfban pontosan akkor van Euler-körséta, ha G-ben minden csúcs foka páros. (3 pont)
   Pontosan akkor nincs tehát Euler-körsétája G-nek, ha G-nek van páratlan fokú csúcsa. (2 pont)
   Egy ilyen csúcs megadása után pedig polinom időben lehet bizonyítani, hogy a foka páratlan, tehát nincs Euler-körséta G-ben. (2 pont)

   Igazából arra is van idő, hogy mind az n csúcsot végignézzük, így a fentiekből tkp az is következik, hogy $\Pi \in P$. És persze jó bizonyítás az is, ha közvetlenül ezt mutatjuk meg, hisz $P \subseteq NP$.

A számítástudomány alapjai

1. ppZH javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában 1 pontot vonunk le.

1. A Cayley egyetem kombinatorika-kertészet szakának első 3 félévében összesen 18 tárgyat kell elvégezni, minden félévben hatot. Az előtanulmányi rend szerint a *Fák* tárgyat a *Feszítőfák* tárgynál előbb kell felvenni, más megkötés nincs. Hányféleképp lehet felvenni a tárgyakat az egyes félévekben, feltéve, hogy minden felvett tárgyat már az adott félévben sikeresen teljesítenek a hallgatók?

   Ha tudjuk, hogy a „Fák” ill. a „Feszítőfák” tárgyat melyik két félévben veszi fel egy hallgató, akkor a nyilván az korábbi félévben kell felvennie az előbbi, a későbbiben pedig az utóbbi tárgyat. (1 pont)
   E két félévet $\binom{3}{2} = 3$-féleképp választhatjuk. (2 pont)
   Ha már tudjuk, hogy melyik két félévről van szó, akkor a maradék 16 tárgyat kell a 3 félévre beosztani, úgy hogy arra a félévre, amikorra a fenti tárgyak egyikét sem vette fel, 6 tárgy jusson, a „Fák”-at hallgatott félévre 5, a „Feszítőfák”-at tartalmazóra pedig szintén további 5 tárgy kerüljön. (3 pont)
   A 6 tárgy felvételére $\binom{16}{6}$ lehetőség van, a maradék tárgyakból az 5-öt $\binom{10}{5}$-féleképp lehet kiválasztani, a megmaradó 5 tárgy pedig a feszítőfákkal együtt szerepel. (3 pont)
   A választásaink függetlenek, ezért a válasz $3 \cdot \binom{16}{6}\binom{10}{5} = 3 \cdot \frac{16!}{10! \cdot 6!} \cdot \frac{10!}{5! \cdot 5!} = 3 \cdot \frac{16!}{6! \cdot 5!^2}$. (1 pont)

2. Mutassuk meg, hogy bármely véges G gráfnak legalább $|V(G)| - |E(G)|$ komponense van.

   Tegyük fel, hogy a G gráfnak k komponense van, rendre $n_1, n_2, \ldots, n_k$ csúccsal. (2 pont)
   Mindegyik komponens tartalmaz egy-egy feszítőfát, (2 pont)
   és minden feszítőfának eggyel kevesebb éle van, mint az adott komponens mérete. (2 pont)
   Ezek szerint G éleinek számára azt kapjuk, hogy $|E(G)| \geq n_1 - 1 + n_2 - 1 + \ldots + n_k - 1 = n_1 + n_2 + \ldots + n_k - k = |V(G)| - k$. (3 pont)
   Innen a feladat állítása közvetlenül adódik. (1 pont)

   Persze másképp is érvelhetünk.

   Ha G-nek egy élét elhagyjuk, attól legfeljebb eggyel nő a gráf komponenseinek száma. (3 pont)
   Ha G minden élét elhagyjuk, akkor a komponensek száma az eredeti k-ról $|V(G)|$-re növekszik, hiszen minden pont izolált lesz. (3 pont)
   Ezek szerint $k + |E(G)| \geq |V(G)|$, (3 pont)
   és ebből átrendezéssel a feladat állítását kapjuk: $k \geq |V(G) - |E(G)|$. (1 pont)

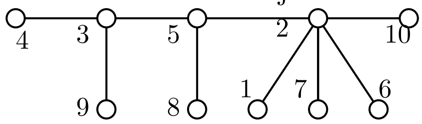
3. A G gráfot úgy kapjuk, hogy az $1, 2, \ldots$ csúcscímkékkel ellátott teljes gráfban párhuzamos élekként megkettőzzük a $(2, 3, 2, 2, 5, 3, 5, 2)$ Prüfer-kódú F feszítőfa éleit. Van-e G-nek Euler-körsétája?

   A G gráfot úgy kapjuk, hogy egy teljes (így öf) gráfba további éleket húzunk be, így G mindenféleképp öf lesz. (1 pont)
   Az órán tanult tétel szerint tehát G-nek pontosan akkor van Euler-körsétája, ha minden csúcsának páros a fokszáma. (3 pont)
   Mivel a Prüfer-kód hossza 8, ezért G-nek 10 csúcsa van. (1 pont)
   A K_{10} gráfban minden pont foka 9, ezért G-ben pontosan akkor lesz minden pont foka páros, ha F minden csúcsának a foka páratlan. (2 pont)
   Tanultuk, hogy a Prüfer-kódban minden csúcs eggyel kevesebbszer szerepel, a fokszámánál, (1 pont)
   márpedig a konkrét Prüfer-kódban minden csúcs ps sokszor szerepel (a 0 is ps szám). (1 pont)
   Tehát F-ben minden fok ptn, így G-ben minden fok ps, vagyis van Euler-körséta G-ben. (1 pont)

   Lehet persze favágással is.

Az órán tanultak szerint megkonstruáljuk a kérdéses F fát a Prüfer-kódjából. F-nek 10 pontja van, hisz a kód hossza 8. A táblázat felső sora a letörölt leveleket mutatja:

1	4	6	7	8	9	3	5	2
2	3	2	2	5	3	5	2	10



(5 pont)

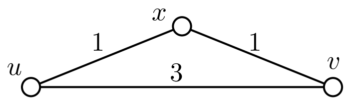
Ha F csúcsaira még egy teljes gráfot illesztünk, akkor az így kapott gráf öf marad, (1 pont)
és minden csúcsának a foka ps lesz, hisz F-ben is és K_{10}-ben is minden csúcs foka páratlan. (1 pont)
Az órán tanult tétel szerint tehát G-nek van Euler-körsétája. (3 pont)

4. Tegyük fel, hogy a G egyszerű gráfnak 20 csúcsa van és G 10-szeresen élösszefüggő. Mutassuk meg, hogy G-nek van Hamilton köre.

   Ha G 10-élöf, akkor minden csúcsának legalább 10 a foka, hiszen ellenkező esetben a minimális fokú csúcsból induló legfeljebb 9 él elhagyásától G szétesne. (4 pont)
   A Dirac tétel szerint ha egy n csúcsú gráfban minden pont foka legalább $\frac{n}{2}$, akkor G-ben van Hamilton kör. (4 pont)
   Ez a tulajdonság fennáll a feladatbeli G gráfra $n = 20$-ra, tehát a Dirac tétel szerint annak van Hamilton köre, és nekünk pontosan ezt kellett bizonyítanunk. (2 pont)

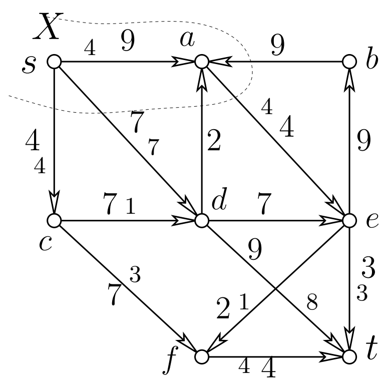
5. Adott egy G gráf, az e él hosszát jelölje $l(e)$. Minden él hosszát növeljük meg 2-vel, azaz legyen $l'(e) = l(e) + 2$ minden élre. Tegyük fel, hogy u és v között P egy legrövidebb út az l' élhosszokkal. Igaz-e, hogy P biztosan egy legrövidebb út u és v között az l élhosszokra nézve is?

   A válasz az, hogy általában nem igaz, hogy minden élhosszt egyformán növelve bármely legrövidebb uv út legrövidebb marad az új hosszokkal is. (1 pont)
   Ennek igazolására elegendő egy ellenpéldát mutatni, azaz egy olyan élhosszokkal ellátott gráfot és abban egy legrövidebb uv utat, ami nem lesz legrövidebb az élhossznövelések után. (3 pont)
   Az ábrán látható gráf ilyen: eredetileg az uxv út hossza 2, a közvetlen uv él hossza pedig 3, tehát uxv az egyedüli legrövidebb uv út. Az élhosszok növelése után az uxv hossza 6 lesz, míg az uv élé 5, tehát uxv nem marad legrövidebb út. (6 pont)



6. Határozzuk meg a mellékelt hálózatban a maximális st-folyam nagyságát, és igazoljuk is, hogy ennél nagyobb st-folyam nem létezik.

   A javító utak módszerével meghatároztunk egy 15 nagyságú folyamot az ábrán látható módon. (a kisebben szedett számok a folyam által felvett értékeket jelentik az adott élen.) (6 pont)
   Az X-szel jelölt ponthalmaz által meghatározott st-vágás kapacitása is éppen 15, tehát ennél nagyobb st-folyam nem lehetséges. (4 pont)



Bevezetés a Számításelméletbe I.
2. ppZH javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában 1 pontot vonunk le.

1. Mutassunk olyan 10 pontú összefüggő, egyszerű G gráfot, amihez úgy lehet egy élt hozzáadni az egyszerűség megtartásával, hogy a $\nu(G)$ és a $\rho(G)$ értéke is megváltozik ennek hatására.

   Gallai idevágó tétele szerint ha G-ben nincs izolált pont, akkor $\nu(G) + \rho(G) = |V(G)|$. (3 pont)
   Ennek megfelelően ha olyan 10 pontú gráfot találunk, aminek nincs izolált pontja, és amihez úgy lehet egy élt hozzáadni, hogy a $\nu(G)$ megváltozzon, akkor $\rho(G)$ is változni fog, tehát teljesülni fog a feladatban leírt tulajdonság. (3 pont)
   Ilyen gráf pl. a 10 pontú csillag (az a 10 csúcsú fa, aminek 9 levele van), mert ebben a gráfban $\nu = 1$, de tetszőleges újabb élt behúzva $\nu = 2$ lesz. (4 pont)

   Természetesen az is tökéletes megoldás, hogy egy konkrét gráfról és hozzáadott élről konkrétan megmutatjuk (Gallai nélkül), hogy a ν és a ρ is változik.

2. Bizonyítsuk be, hogy ha G egyszerű, síkbarajzolható gráf, akkor G bármely G^* duálisának van olyan tartománya, amit legfeljebb 5 él határol.

   Tanították, hogy ha G egyszerű, síkbarajzolható és csúcsainak száma $n \geq 3$, akkor G-nek legfeljebb $3n - 6$ éle lehet. (2 pont)
   Ha G-nek legfeljebb két csúcsa van, akkor éleinek száma legfeljebb egy, ugyanennyi éle van tehát G^*-nak is, ezért G^* bármely lapjának határa legfeljebb két élből áll. (Hiszen az egyetlen él mindkét oldala határolhatja ugyanazt a lapot.) (1 pont)
   Ha pedig G-nek legalább 3 csúcsa van, akkor a G-beli csúcsok fokszámösszege az élszám kétszerese, tehát legfeljebb $6n - 12$. (1 pont)
   Ez azt jelenti, hogy G-nek van olyan csúcsa, ami legfeljebb ötödfokú, hiszen ha minden csúcsnak legalább 6 lenne a foka, akkor a fokszámösszeg legalább $6n$ lenne. (2 pont)
   Legyen v ilyen, legfeljebb 5-ödfokú csúcs G-ben. A v csúcs a G^* valamelyik tartományának belsejében van. Az ezen tartomány határoló G^*-beli élek éppen a v-ből induló G-beli éleknek felelnek meg, (3 pont)
   ezért ezt a tartományt legfeljebb 5 él határolja, mi pedig éppen egy ilyen létezését akartuk igazolni. (2 pont)

   Ha vki hivatkozza, hogy minden egyszerű sr gráfnak van legfeljebb 5-ödfokú csúcsa, azért is jár az 5 pont. Ha a $3n - 6$-os felső becslés alapján jutunk erre, akkor vhogy el kell intézni a legeljebb 2 csúcsú gráfokat.

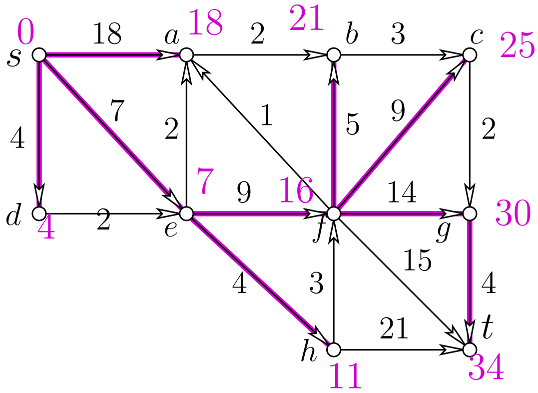
3. Tegyük fel, hogy G olyan $2n$ csúcsú páros gráf, aminek van teljes párosítása. Határozzuk meg a komplementergráf kromatikus számát, $\chi(\overline{G})$-t.

   A G gráf teljes párosítása n független élből áll, ezek szerint G mindkét színosztálya egyaránt n csúcsot tartalmaz. (2 pont)
   Ez azt jelenti, hogy a $\overline{G}$ komplementergráfban van n pontú klikk, (2 pont)
   így $\chi(\overline{G}) \geq \omega(\overline{G}) \geq n$ adódik a kromatikus számra. (2 pont)
   Azt fogjuk igazolni, hogy $\chi(\overline{G}) = n$, és ehhez elegendő megadnunk $\overline{G}$ csúcsainak egy n színnel történő kiszínezését. (2 pont)
   Vegyük észre, hogy ha a teljes párosítás minden egyes éléhez hozzárendelünk egy-egy különböző színt, és minden párosításél mindkét végpontját az élhez rendelt színre színezzük, akkor azonos színű csúcsok

nem lesznek szomszédosak $\overline{G}$-ben, továbbá éppen n színt használtunk fel a színezéshez. Nekünk pedig pontosan erre volt szükségünk. (2 pont)

4. Határozzuk meg az alábbi PERT probléma optimális ütemezése melletti kritikus tevékenységeket!

   Az alábbi ábrán az órán tanult módszerrel $s, d, e, h, f, a, b, c, g, t$ sorrendben feldolgoztuk a gráf csúcsait, meghatároztuk az egyes tevékenységek legkorábbi kezdési időpontjait, és megjelöltük azokat az éleket, amik ezeket a legkorábbi időpontokat meghatározzák. (7 pont)



   Azok a kritikus tevékenységek, amik rajta vannak a megjelölt élekből álló st úton, (1 pont)
   konkrétan az s, e, f, g és t tevékenységek, (2 pont)
   és 34 egységnyi idő kell a PERT feladataz optimális ütemezés melletti végrehajtásához. (0 pont)

5. Mutassuk meg, hogy ha egy G gráf néhány éle úgy van irányítva, hogy nem alkotnak irányított kört, akkor G a többi éle is megirányítható úgy, hogy a kapott irányított gráf aciklikus legyen.

   Tekintsük a G csúcshalmazán az eredetileg megirányított élek alkotta D irányított gráfot. A feltétel szerint D-ben nincs irányított kör, tehát DAG. Az ilyen gráfokról pedig azt tanították, hogy van a csúcsaiknak topologikus sorrendje, aholis minden él a kisebb sorszámú csúcsból vezet a nagyobba. (4 pont)
   Az a feladatunk, hogy a G eddig irányítatlan éleit is úgy irányítsuk, hogy DAG-ot kapjunk, tehát továbbra is legyen topologikus sorrend. (2 pont)
   Erre alkalmas eljárás pl az, hogy a D topologikus sorrendje megmaradjon a megirányított G topologikus sorrendjének, azaz G minden élét úgy irányítjuk, hogy a kisebb sorszámú csúcsból a nagyobb sorszámúba vezessen. (4 pont)

6. A valós számokból álló $a_1, \ldots, a_n$ sorozat olyan, hogy az $a_1^3, a_2^3, \ldots, a_n^3$ sorozat egy darabig nő, utána csökken. Adjunk konstansszor n ĺosszehasonlítást használó algoritmust, ami rendezi az $a_1, \ldots, a_n$ sorozatot.

   Mivel az $x \mapsto x^3$ szigorúan monoton növekedő függvény, ezért az $a_1, \ldots, a_n$ sorozatra is igaz, hogy egy darabig nő, utána csökken. (2 pont)
   A két rendezett tömböt egy rendezett tömbbe összefésülő eljáráshoz hasonlóan dolgozunk, úgy hogy az egyik tömbnek az eredeti tömböt, a másiknak a hátulról olvasott eredeti tömböt tekintjük. (3 pont)
   Konkrétan, először összehasonlítjuk az a_1 és a_n elemeket, a kisebb lesz a rendezett sorozat első eleme, és a következő összehasonlításban a szomszédját fogjuk összehasonlítan az előző összehasonlításban nagyobbnak bizonyult elemmel. Minden összehasonlításban a kisebbik elem lesz a rendezett sorozat következő eleme, a nagyobbik elem túlél, és részt vesz a következő összehasonlításban. Az eljárás akkor ér véget, ha az eredeti sorozat két szomszédos elemét hasonlítjuk össze, amikoris azokat a kapott sorrendnek megfelelően illesztjük a rendezett sorozat végére. (3 pont)
   Mivel minden egyes összehasonlításkor legalább egy elem helyét megtudjuk, legfeljebb n összehasonlításra kerül sor. (2 pont)