

A számítástudomány alapjai

RLA mátrixok és ESÁ-ok az oszlopok felől nézve

2025. november 18.

Hol tartunk?

- ▶ Független halmaz hízlalása, generátorrendszer ritkítása

Hol tartunk?

- ▶ Független halmaz hízlalása, generátorrendszer ritkítása
- ▶ FG-egyenlőtlenség

Hol tartunk?

- ▶ Független halmaz hízlalása, generátorrendszer ritkítása
- ▶ FG-egyenlőtlenség
- ▶ Bázis: lineárisan független generátorrendszer

Hol tartunk?

- ▶ Független halmaz hízlalása, generátorrendszer ritkítása
- ▶ FG-egyenlőtlenség
- ▶ Bázis: lineárisan független generátorrendszer
- ▶ Bázis előállítása független rendszer hízlalásával ill. generátorrendszer ritkításával

Hol tartunk?

- ▶ Független halmaz hízlalása, generátorrendszer ritkítása
- ▶ FG-egyenlőtlenség
- ▶ Bázis: lineárisan független generátorrendszer
- ▶ Bázis előállítása független rendszer hízlalásával ill. generátorrendszer ritkításával
- ▶ Altér dimenziója

Hol tartunk?

- ▶ Független halmaz hízlalása, generátorrendszer ritkítása
- ▶ FG-egyenlőtlenség
- ▶ Bázis: lineárisan független generátorrendszer
- ▶ Bázis előállítása független rendszer hízlalásával ill. generátorrendszer ritkításával
- ▶ Altér dimenziója
- ▶ bázis szerinti koordinátavektor

Hol tartunk?

- ▶ Független halmaz hízlalása, generátorrendszer ritkítása
- ▶ FG-egyenlőtlenség
- ▶ Bázis: lineárisan független generátorrendszer
- ▶ Bázis előállítása független rendszer hízlalásával ill. generátorrendszer ritkításával
- ▶ Altér dimenziója
- ▶ bázis szerinti koordinátavektor

Hová tartunk?

Hol tartunk?

- ▶ Független halmaz hízlalása, generátorrendszer ritkítása
- ▶ FG-egyenlőtlenség
- ▶ Bázis: lineárisan független generátorrendszer
- ▶ Bázis előállítása független rendszer hízlalásával ill. generátorrendszer ritkításával
- ▶ Altér dimenziója
- ▶ bázis szerinti koordinátavektor

Hová tartunk?

- ▶ Megértjük, mit jelent a RLA tulajdonság ill. ESÁ-ok sorozata a mátrix oszlopai szempontjából

Hol tartunk?

- ▶ Független halmaz hízlalása, generátorrendszer ritkítása
- ▶ FG-egyenlőtlenség
- ▶ Bázis: lineárisan független generátorrendszer
- ▶ Bázis előállítás független rendszer hízlalásával ill. generátorrendszer ritkításával
- ▶ Altér dimenziója
- ▶ bázis szerinti koordinátavektor

Hová tartunk?

- ▶ Megértjük, mit jelent a RLA tulajdonság ill. ESÁ-ok sorozata a mátrix oszlopai szempontjából
- ▶ Egyszerűbb eljárást mutatunk lineáris függetlenség eldöntésére valamint bázis és koordinátavektor keresésére

RLA mátrix oszlopainak tulajdonsága

RLA mátrix oszlopainak tulajdonsága

Figyeljük meg egy RLA mátrix oszlopait!

$$M = \begin{pmatrix} 1 & & & & & ? & & & & & \\ & & 1 & & & \vdots & & & & & \\ & & & & 1 & ? & & & & & \\ & & & & & 0 & & 1 & & & \\ & & & & & \vdots & & & & & \\ & & & & & 0 & & & & 1 & \end{pmatrix}$$

RLA mátrix oszlopainak tulajdonsága

Figyeljük meg egy RLA mátrix oszlopait!

$$M = \begin{pmatrix} 1 & & & & & ? & & & & & \\ & & 1 & & & \vdots & & & & & \\ & & & & 1 & ? & & & & & \\ & & & & & 0 & & 1 & & & \\ & & & & & \vdots & & & & & \\ & & & & & 0 & & & & 1 & \end{pmatrix}$$

Megf: Az M mátrix pontosan akkor RLA, ha úgy kapható az $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_k$ oszlopok alkotta mátrixból oszlopok beszúrásával, hogy minden beszúrt oszlop a tőle balra álló $\underline{e}_j$ oszlopok lineáris kombinációja.

RLA mátrix oszlopainak tulajdonsága

Figyeljük meg egy RLA mátrix oszlopait!

$$M = \begin{pmatrix} 1 & & & & & ? & & & & & \\ & & 1 & & & \vdots & & & & & \\ & & & & 1 & ? & & & & & \\ & & & & & 0 & & 1 & & & \\ & & & & & \vdots & & & & & \\ & & & & & 0 & & & & 1 & \end{pmatrix}$$

Megf: Az M mátrix pontosan akkor RLA, ha úgy kapható az $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_k$ oszlopok alkotta mátrixból oszlopok beszúrásával, hogy minden beszúrt oszlop a töle balra álló $\underline{e}_j$ oszlopok lineáris kombinációja.

Biz: Tfh M RLA. Ekkor vezéregyesek oszlopai a standard bázis $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ egységvektorai. Minden vezéregyest nem tartalmazó oszlop minden nemnulla elemétől balra van a sorban vezéregyes. Ezen vezéregyesek oszlopainak alkalmas lineáris kombinációjaként előáll a vezéregyest nem tartalmazó oszlop. Az M mátrix tehát előállítható a megfigyelésben leírt módon.

RLA mátrix oszlopainak tulajdonsága

Figyeljük meg egy RLA mátrix oszlopait!

$$M = \begin{pmatrix} 1 & & & & & ? & & & & & \\ & & 1 & & & \vdots & & & & & \\ & & & & 1 & ? & & & & & \\ & & & & & 0 & & 1 & & & \\ & & & & & \vdots & & & & & \\ & & & & & 0 & & & & 1 & \end{pmatrix}$$

Megf: Az M mátrix pontosan akkor RLA, ha úgy kapható az $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_k$ oszlopok alkotta mátrixból oszlopok beszúrásával, hogy minden beszúrt oszlop a töle balra álló $\underline{e}_j$ oszlopok lineáris kombinációja.

Biz:

RLA mátrix oszlopainak tulajdonsága

Figyeljük meg egy RLA mátrix oszlopait!

$$M = \begin{pmatrix} 1 & & & & & ? & & & & & \\ & & 1 & & & \vdots & & & & & \\ & & & & 1 & ? & & & & & \\ & & & & & 0 & & 1 & & & \\ & & & & & \vdots & & & & & \\ & & & & & 0 & & & & 1 & \end{pmatrix}$$

Megf: Az M mátrix pontosan akkor RLA, ha úgy kapható az $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_k$ oszlopok alkotta mátrixból oszlopok beszúrásával, hogy minden beszúrt oszlop a töle balra álló $\underline{e}_j$ oszlopok lineáris kombinációja.

Biz: Most tfh M az $(\underline{e}_1 | \dots | \underline{e}_k)$ mátrixból keletkezik a megfigyelésben leírt módon történő oszlopbeszúrásokkal. Ekkor a vezéregyesek pontosan az $\underline{e}_j$ vektorok egyesei lesznek. Ezért minden vezéregyes feletti sorban áll a vezéregyestől balra másik vezéregyes, és a vezéregyesek felett is csak 0-k állnak, tehát M RLA.



ESÁ-ok hatása a sor- és oszlopvektorokra

Egy $M \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrixot tekinthetünk n db $\mathbb{R}^k$ -beli sorvektornak és k db $\mathbb{R}^n$ -beli oszlopvektornak is. Most azt vizsgáljuk, hogyan hat egy ESÁ ezen sor- ill. oszlopvektorok rendszerére.

ESÁ-ok hatása a sor- és oszlopvektorokra

Egy $M \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrixot tekinthetünk n db $\mathbb{R}^k$ -beli sorvektornak és k db $\mathbb{R}^n$ -beli oszlopvektornak is. Most azt vizsgáljuk, hogyan hat egy ESÁ ezen sor- ill. oszlopvektorok rendszerére.

Állítás: Tfh M' -t ESÁ-okkal kaptuk az $M \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrixból. Ha S ill. S' az M ill. M' sorvektorainak halmaza, akkor $\langle S \rangle = \langle S' \rangle$.

ESÁ-ok hatása a sor- és oszlopvektorokra

Egy $M \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrixot tekinthetünk n db $\mathbb{R}^k$ -beli sorvektornak és k db $\mathbb{R}^n$ -beli oszlopvektornak is. Most azt vizsgáljuk, hogyan hat egy ESÁ ezen sor- ill. oszlopvektorok rendszerére.

Állítás: Tfh M' -t ESÁ-okkal kaptuk az $M \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrixból. Ha S ill. S' az M ill. M' sorvektorainak halmaza, akkor $\langle S \rangle = \langle S' \rangle$.

Biz: Feltehető, hogy M' -t egyetlen ESÁ-sal kaptuk M -ből.

Bármelyik konkrét ESÁ-t is alkalmaztuk, az újonnan megjelenő sor a korábbi sorok lineáris kombinációja, így benne van az $\langle S \rangle$ altérben. Ezért $S' \subseteq \langle S \rangle$, így $\langle S' \rangle \subseteq \langle S \rangle$. Láttuk, hogy bármely ESÁ megfordítása is kivitelezhető ESÁ-okkal, ezért $\langle S \rangle \subseteq \langle S' \rangle$ is teljesül. E két megfigyelésből pedig $\langle S \rangle = \langle S' \rangle$ adódik. $\square$

ESÁ-ok hatása a sor- és oszlopvektorokra

Állítás: Tfh M' -t ESÁ-okkal kaptuk az $M \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrixból. Ha S ill. S' az M ill. M' sorvektorainak halmaza, akkor $\langle S \rangle = \langle S' \rangle$.

ESÁ-ok hatása a sor- és oszlopvektorokra

Állítás: Tfh M' -t ESÁ-okkal kaptuk az $M \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrixból. Ha S ill. S' az M ill. M' sorvektorainak halmaza, akkor $\langle S \rangle = \langle S' \rangle$.

Állítás: Tfh az $M \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrixból M' -t ESÁ-okkal kaptuk és $O = \{\underline{o}_1, \dots, \underline{o}_k\}$ ill. $O' = \{\underline{o}'_1, \dots, \underline{o}'_k\}$ az oszlopvektoraik halmaza. Ekkor O -n és O' -n ugyanazok a lineáris összefüggések teljesülnek:

$$\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}_i \right) \iff \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}'_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}'_i \right).$$

ESÁ-ok hatása a sor- és oszlopvektorokra

Állítás: Tfh M' -t ESÁ-okkal kaptuk az $M \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrixból. Ha S ill. S' az M ill. M' sorvektorainak halmaza, akkor $\langle S \rangle = \langle S' \rangle$.

Állítás: Tfh az $M \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrixból M' -t ESÁ-okkal kaptuk és $O = \{\underline{o}_1, \dots, \underline{o}_k\}$ ill. $O' = \{\underline{o}'_1, \dots, \underline{o}'_k\}$ az oszlopvektoraik halmaza. Ekkor O -n és O' -n ugyanazok a lineáris összefüggések teljesülnek:

$$\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}_i \right) \iff \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}'_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}'_i \right).$$

Biz:

Ismét feltehető, hogy M' egyetlen ESÁ-sal keletkezett. Ráadásul elég a $\Rightarrow$: irányt bizonyítani: a $\Leftarrow$: következik abból, hogy minden ESÁ fordítottja megvalósítható legfeljebb három ESÁ-sal. Ezért ha egy lin.összefüggés fennál M' -re akkor az ezt legfeljebb három ESÁ megőrzi, tehát igaz marad M -re is.

ESÁ-ok hatása a sor- és oszlopvektorokra

Állítás: Tfh M' -t ESÁ-okkal kaptuk az $M \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrixból. Ha S ill. S' az M ill. M' sorvektorainak halmaza, akkor $\langle S \rangle = \langle S' \rangle$.

Állítás: Tfh az $M \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrixból M' -t ESÁ-okkal kaptuk és $O = \{\underline{o}_1, \dots, \underline{o}_k\}$ ill. $O' = \{\underline{o}'_1, \dots, \underline{o}'_k\}$ az oszlopvektoraik halmaza. Ekkor O -n és O' -n ugyanazok a lineáris összefüggések teljesülnek:

$$\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}_i \right) \iff \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}'_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}'_i \right).$$

Biz:

ESÁ-ok hatása a sor- és oszlopvektorokra

Állítás: Tfh M' -t ESÁ-okkal kaptuk az $M \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrixból. Ha S ill. S' az M ill. M' sorvektorainak halmaza, akkor $\langle S \rangle = \langle S' \rangle$.

Állítás: Tfh az $M \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrixból M' -t ESÁ-okkal kaptuk és $O = \{\underline{o}_1, \dots, \underline{o}_k\}$ ill. $O' = \{\underline{o}'_1, \dots, \underline{o}'_k\}$ az oszlopvektoraik halmaza. Ekkor O -n és O' -n ugyanazok a lineáris összefüggések teljesülnek:

$$\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}_i \right) \iff \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}'_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}'_i \right).$$

Biz:

$\Rightarrow$: A bal oldali összefüggés azt jelenti, hogy M minden sora megoldja a $\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^k \mu_i x_i$ egyenletet, azaz M bármely sorának első elemét x_1 , a másodikat x_2 , stb helyébe helyettesítve fennáll az egyenlőség. A jobb oldali összefüggés igazolásához ugyanezt kell megmutatni M' sorairól. Sorcsere esetén pontosan ugyanazokról az egyenlőségekről van szó, skalárral szorzás esetén az egyik egyenletet skalárral kell végig szorozni, sorösszeadás esetén pedig az új egyenlőség két korábban teljesülő egyenlet összege. $\square$

ESÁ-ok hatása a sor- és oszlopvektorokra

Állítás: Tfh M' -t ESÁ-okkal kaptuk az $M \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrixból. Ha S ill. S' az M ill. M' sorvektorainak halmaza, akkor $\langle S \rangle = \langle S' \rangle$.

Állítás: Tfh az $M \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrixból M' -t ESÁ-okkal kaptuk és $O = \{\underline{o}_1, \dots, \underline{o}_k\}$ ill. $O' = \{\underline{o}'_1, \dots, \underline{o}'_k\}$ az oszlopvektoraik halmaza. Ekkor O -n és O' -n ugyanazok a lineáris összefüggések teljesülnek:

$$\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}_i \right) \iff \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}'_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}'_i \right).$$

ESÁ-ok hatása a sor- és oszlopvektorokra

Állítás: Tfh M' -t ESÁ-okkal kaptuk az $M \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrixból. Ha S ill. S' az M ill. M' sorvektorainak halmaza, akkor $\langle S \rangle = \langle S' \rangle$.

Állítás: Tfh az $M \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrixból M' -t ESÁ-okkal kaptuk és $O = \{\underline{o}_1, \dots, \underline{o}_k\}$ ill. $O' = \{\underline{o}'_1, \dots, \underline{o}'_k\}$ az oszlopvektoraik halmaza. Ekkor O -n és O' -n ugyanazok a lineáris összefüggések teljesülnek:

$$\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}_i \right) \iff \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}'_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}'_i \right).$$

Példa: Döntsük el, hogy lin.ftn.-ek-e az alábbi M mátrix oszlopai.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

ESÁ-ok hatása a sor- és oszlopvektorokra

Állítás: Tfh M' -t ESÁ-okkal kaptuk az $M \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrixból. Ha S ill. S' az M ill. M' sorvektorainak halmaza, akkor $\langle S \rangle = \langle S' \rangle$.

Állítás: Tfh az $M \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrixból M' -t ESÁ-okkal kaptuk és $O = \{\underline{o}_1, \dots, \underline{o}_k\}$ ill. $O' = \{\underline{o}'_1, \dots, \underline{o}'_k\}$ az oszlopvektoraik halmaza. Ekkor O -n és O' -n ugyanazok a lineáris összefüggések teljesülnek:

$$\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}_i \right) \iff \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}'_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}'_i \right).$$

Példa: Döntsük el, hogy lin.ftn.-ek-e az alábbi M mátrix oszlopai.

Megoldás: Varázslás. ESÁ-okkal RLA mátrixot képezünk.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

ESÁ-ok hatása a sor- és oszlopvektorokra

Állítás: Tfh M' -t ESÁ-okkal kaptuk az $M \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrixból. Ha S ill. S' az M ill. M' sorvektorainak halmaza, akkor $\langle S \rangle = \langle S' \rangle$.

Állítás: Tfh az $M \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrixból M' -t ESÁ-okkal kaptuk és $O = \{\underline{o}_1, \dots, \underline{o}_k\}$ ill. $O' = \{\underline{o}'_1, \dots, \underline{o}'_k\}$ az oszlopvektoraik halmaza. Ekkor O -n és O' -n ugyanazok a lineáris összefüggések teljesülnek:

$$\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}_i \right) \iff \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}'_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}'_i \right).$$

Példa: Döntsük el, hogy lin.ftn.-ek-e az alábbi M mátrix oszlopai.

Megoldás: Varázslás. ESÁ-okkal RLA mátrixot képezünk.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ESÁ-ok hatása a sor- és oszlopvektorokra

Állítás: Tfh M' -t ESÁ-okkal kaptuk az $M \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrixból. Ha S ill. S' az M ill. M' sorvektorainak halmaza, akkor $\langle S \rangle = \langle S' \rangle$.

Állítás: Tfh az $M \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrixból M' -t ESÁ-okkal kaptuk és $O = \{\underline{o}_1, \dots, \underline{o}_k\}$ ill. $O' = \{\underline{o}'_1, \dots, \underline{o}'_k\}$ az oszlopvektoraik halmaza. Ekkor O -n és O' -n ugyanazok a lineáris összefüggések teljesülnek:

$$\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}_i \right) \iff \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}'_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}'_i \right).$$

Példa: Döntsük el, hogy lin.ftn.-ek-e az alábbi M mátrix oszlopai.

Megoldás: Varázslás. ESÁ-okkal RLA mátrixot képezünk.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ESÁ-ok hatása a sor- és oszlopvektorokra

Állítás: Tfh M' -t ESÁ-okkal kaptuk az $M \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrixból. Ha S ill. S' az M ill. M' sorvektorainak halmaza, akkor $\langle S \rangle = \langle S' \rangle$.

Állítás: Tfh az $M \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrixból M' -t ESÁ-okkal kaptuk és $O = \{\underline{o}_1, \dots, \underline{o}_k\}$ ill. $O' = \{\underline{o}'_1, \dots, \underline{o}'_k\}$ az oszlopvektoraik halmaza. Ekkor O -n és O' -n ugyanazok a lineáris összefüggések teljesülnek:

$$\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}_i \right) \iff \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}'_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}'_i \right).$$

Példa: Döntsük el, hogy lin.ftn.-ek-e az alábbi M mátrix oszlopai.

Megoldás: Varázslás. ESÁ-okkal RLA mátrixot képezünk.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ESÁ-ok hatása a sor- és oszlopvektorokra

Állítás: Tfh M' -t ESÁ-okkal kaptuk az $M \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrixból. Ha S ill. S' az M ill. M' sorvektorainak halmaza, akkor $\langle S \rangle = \langle S' \rangle$.

Állítás: Tfh az $M \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrixból M' -t ESÁ-okkal kaptuk és $O = \{\underline{o}_1, \dots, \underline{o}_k\}$ ill. $O' = \{\underline{o}'_1, \dots, \underline{o}'_k\}$ az oszlopvektoraik halmaza. Ekkor O -n és O' -n ugyanazok a lineáris összefüggések teljesülnek:

$$\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}_i \right) \iff \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}'_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}'_i \right).$$

Példa: Döntsük el, hogy lin.ftn.-ek-e az alábbi M mátrix oszlopai.

Megoldás: Varázslás. ESÁ-okkal RLA mátrixot képezünk.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ESÁ-ok hatása a sor- és oszlopvektorokra

Állítás: Tfh M' -t ESÁ-okkal kaptuk az $M \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrixból. Ha S ill. S' az M ill. M' sorvektorainak halmaza, akkor $\langle S \rangle = \langle S' \rangle$.

Állítás: Tfh az $M \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrixból M' -t ESÁ-okkal kaptuk és $O = \{\underline{o}_1, \dots, \underline{o}_k\}$ ill. $O' = \{\underline{o}'_1, \dots, \underline{o}'_k\}$ az oszlopvektoraik halmaza. Ekkor O -n és O' -n ugyanazok a lineáris összefüggések teljesülnek:

$$\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}_i \right) \iff \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}'_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}'_i \right).$$

Példa: Döntsük el, hogy lin.ftn.-ek-e az alábbi M mátrix oszlopai.

Megoldás: Varázslás. ESÁ-okkal RLA mátrixot képezünk.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ A kapott RLA mátrixra $\underline{o}'_4 = -7\underline{o}'_1 + 3\underline{o}'_2 + 2\underline{o}'_3$.
Így M oszlopaira is $\underline{o}_4 = -7\underline{o}_1 + 3\underline{o}_2 + 2\underline{o}_3$ teljesül.
Ezért M oszlopai nem lin. ftn.-ek. □

Varázslás II: bázis előállítása generátorrendszerből

Példa:

Keressük meg az alábbi vektorok által generált V altér egy bázisát!

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \underline{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Varázslás II: bázis előállítása generátorrendszerből

Példa:

Keressük meg az alábbi vektorok által generált V altér egy bázisát!

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \underline{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Az $(\underline{u}|\underline{v}|\underline{w}|\underline{x}|\underline{y})$ mátrixot ESÁ-okkal RLA-vá alakítjuk. Ehhez szabad (de nem kötelező) Gauss-eliminációt használni.

Varázslás II: bázis előállítása generátorrendszerből

Példa:

Keressük meg az alábbi vektorok által generált V altér egy bázisát!

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \underline{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Az $(\underline{u}|\underline{v}|\underline{w}|\underline{x}|\underline{y})$ mátrixot ESÁ-okkal RLA-vá alakítjuk. Ehhez szabad (de nem kötelező) Gauss-eliminációt használni.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 4 & -9 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Varázslás II: bázis előállítás generátorrendszerből

Példa:

Keressük meg az alábbi vektorok által generált V altér egy bázisát!

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \underline{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Az $(\underline{u}|\underline{v}|\underline{w}|\underline{x}|\underline{y})$ mátrixot ESÁ-okkal RLA-vá alakítjuk. Ehhez szabad (de nem kötelező) Gauss-eliminációt használni.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 4 & -9 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 4 & -9 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Varázslás II: bázis előállítása generátorrendszerből

Példa:

Keressük meg az alábbi vektorok által generált V altér egy bázisát!

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \underline{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Az $(\underline{u}|\underline{v}|\underline{w}|\underline{x}|\underline{y})$ mátrixot ESÁ-okkal RLA-vá alakítjuk. Ehhez szabad (de nem kötelező) Gauss-eliminációt használni.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 4 & -9 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 4 & -9 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & -10 & -7 \end{pmatrix}$$

Varázslás II: bázis előállítása generátorrendszerből

Példa:

Keressük meg az alábbi vektorok által generált V altér egy bázisát!

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \underline{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Az $(\underline{u}|\underline{v}|\underline{w}|\underline{x}|\underline{y})$ mátrixot ESÁ-okkal RLA-vá alakítjuk. Ehhez szabad (de nem kötelező) Gauss-eliminációt használni.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 4 & -9 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 4 & -9 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & -10 & -7 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 5 & 5 & -10 & -7 \end{pmatrix}$$

Varázslás II: bázis előállítása generátorrendszerből

Példa:

Keressük meg az alábbi vektorok által generált V altér egy bázisát!

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \underline{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Az $(\underline{u}|\underline{v}|\underline{w}|\underline{x}|\underline{y})$ mátrixot ESÁ-okkal RLA-vá alakítjuk. Ehhez szabad (de nem kötelező) Gauss-eliminációt használni.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 4 & -9 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 4 & -9 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & -10 & -7 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 5 & 5 & -10 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 5 & 5 & -10 & -7 \end{pmatrix}$$

Varázslás II: bázis előállítása generátorrendszerből

Példa:

Keressük meg az alábbi vektorok által generált V altér egy bázisát!

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \underline{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Az $(\underline{u}|\underline{v}|\underline{w}|\underline{x}|\underline{y})$ mátrixot ESÁ-okkal RLA-vá alakítjuk. Ehhez szabad (de nem kötelező) Gauss-eliminációt használni.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 4 & -9 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 4 & -9 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & -10 & -7 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 5 & 5 & -10 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 5 & 5 & -10 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Varázslás II: bázis előállítása generátorrendszerből

Példa:

Keressük meg az alábbi vektorok által generált V altér egy bázisát!

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \underline{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Az $(\underline{u}|\underline{v}|\underline{w}|\underline{x}|\underline{y})$ mátrixot ESÁ-okkal RLA-vá alakítjuk. Ehhez szabad (de nem kötelező) Gauss-eliminációt használni.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 4 & -9 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 4 & -9 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & -10 & -7 \end{pmatrix} \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 5 & 5 & -10 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 5 & 5 & -10 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ \sim \begin{pmatrix} \underline{u} & \underline{v} & \underline{w} & \underline{x} & \underline{y} \\ 1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Varázslás II: bázis előállítása generátorrendszerből

Példa:

Keressük meg az alábbi vektorok által generált V altér egy bázisát!

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \underline{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Az $(\underline{u}|\underline{v}|\underline{w}|\underline{x}|\underline{y})$ mátrixot ESÁ-okkal RLA-vá alakítjuk. Ehhez szabad (de nem kötelező) Gauss-eliminációt használni.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 4 & -9 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 4 & -9 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & -10 & -7 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 5 & 5 & -10 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 5 & 5 & -10 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} \underline{u} & \underline{v} & \underline{w} & \underline{x} & \underline{y} \\ 1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \underline{w} = \underline{v} - \underline{u}, \underline{x} = 3\underline{u} - 2\underline{v}, \text{ azaz } \underline{w}, \underline{x} \in \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{y} \rangle. \\ \text{Tehát } \{\underline{u}, \underline{v}, \underline{y}\} \text{ a } V \text{ generátorrendszere.} \\ \text{Másrészt } \{\underline{u}, \underline{v}, \underline{y}\} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\} \text{ lin.ftn.} \\ \text{Konklúzió: } \{\underline{u}, \underline{v}, \underline{y}\} \text{ a } V \text{ altér egy bázisa.} \end{array}$$



Varázslás III: koordinátavektor-számítás

Példa: Legyen $B = \{b_1, b_2\}$ a $V \leq \mathbb{R}^3$ bázisa, ahol
 $\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ill. $\underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ és $\underline{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$. Keressük a $[v]_B$ -t, ha $v \in V$.

Varázslás III: koordinátavektor-számítás

Példa: Legyen $B = \{b_1, b_2\}$ a $V \leq \mathbb{R}^3$ bázisa, ahol $\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ill. $\underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ és $\underline{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$. Keressük a $[v]_B$ -t, ha $v \in V$.

Megoldás: A vektorokból képzett mátrixot ESÁ-okkal RLA-vá transzformáljuk:

Varázslás III: koordinátavektor-számítás

Példa: Legyen $B = \{b_1, b_2\}$ a $V \leq \mathbb{R}^3$ bázisa, ahol $\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ill. $\underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ és $\underline{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$. Keressük a $[v]_B$ -t, ha $v \in V$.

Megoldás: A vektorokból képzett mátrixot ESÁ-okkal RLA-vá transzformáljuk:

$$(\underline{b}_1 | \underline{b}_2 | \underline{v}) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Varázslás III: koordinátavektor-számítás

Példa: Legyen $B = \{b_1, b_2\}$ a $V \leq \mathbb{R}^3$ bázisa, ahol $\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ill. $\underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ és $\underline{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$. Keressük a $[v]_B$ -t, ha $v \in V$.

Megoldás: A vektorokból képzett mátrixot ESÁ-okkal RLA-vá transzformáljuk:

$$(\underline{b}_1 | \underline{b}_2 | \underline{v}) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Varázslás III: koordinátavektor-számítás

Példa: Legyen $B = \{b_1, b_2\}$ a $V \leq \mathbb{R}^3$ bázisa, ahol $\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ill. $\underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ és $\underline{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$. Keressük a $[v]_B$ -t, ha $v \in V$.

Megoldás: A vektorokból képzett mátrixot ESÁ-okkal RLA-vá transzformáljuk:

$$(\underline{b}_1 | \underline{b}_2 | \underline{v}) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

Varázslás III: koordinátavektor-számítás

Példa: Legyen $B = \{b_1, b_2\}$ a $V \leq \mathbb{R}^3$ bázisa, ahol $\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ill. $\underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ és $\underline{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$. Keressük a $[v]_B$ -t, ha $v \in V$.

Megoldás: A vektorokból képzett mátrixot ESÁ-okkal RLA-vá transzformáljuk:

$$(\underline{b}_1 | \underline{b}_2 | \underline{v}) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M'$$

Varázslás III: koordinátavektor-számítás

Példa: Legyen $B = \{b_1, b_2\}$ a $V \leq \mathbb{R}^3$ bázisa, ahol $\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ill. $\underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ és $\underline{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$. Keressük a $[\underline{v}]_B$ -t, ha $\underline{v} \in V$.

Megoldás: A vektorokból képzett mátrixot ESÁ-okkal RLA-vá transzformáljuk:

$$(\underline{b}_1 | \underline{b}_2 | \underline{v}) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M'$$

Az M' RLA $m \times \underline{o}'_1, \underline{o}'_2, \underline{o}'_3$ oszlopaira teljesül, hogy

$$\underline{o}'_3 = -3\underline{o}'_1 + 4\underline{o}'_2.$$

Az ESÁ-ok oszlopokra gyakorolt hatásáról látottak szerint

$$\underline{v} = -3\underline{b}_1 + 4\underline{b}_2.$$

$$\text{Tehát } \underline{v} \in V \text{ és } [\underline{v}]_B = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$



Mi haszna a lineáris algebrának???

Mi haszna a lineáris algebrának???

Amiről itt és most nem esik szó: koordinátageometria, konvex alakzatok geometriája ill. lineáris célfüggvény optimalizálását előíró feladatok megoldása. Ezek mindegyike (számos másik mellett) a lineáris algebra fontos, gyakorlati problémák megoldásában is nélkülözhetetlen alkalmazási területe.

Mi haszna a lineáris algebrának???

Amiről itt és most nem esik szó: koordinátageometria, konvex alakzatok geometriája ill. lineáris célfüggvény optimalizálását előíró feladatok megoldása. Ezek mindegyike (számos másik mellett) a lineáris algebra fontos, gyakorlati problémák megoldásában is nélkülözhetetlen alkalmazási területe.

Az utóbbi években azonban egy minden korábbinál fontosabb alkalmazási terület emelkedett ki a lineáris algebrára támaszkodó alkalmazott tudományok és technológiák közül.

Mi haszna a lineáris algebrának???

Amiről itt és most nem esik szó: koordinátageometria, konvex alakzatok geometriája ill. lineáris célfüggvény optimalizálását előíró feladatok megoldása. Ezek mindegyike (számos másik mellett) a lineáris algebra fontos, gyakorlati problémák megoldásában is nélkülözhetetlen alkalmazási területe.

Az utóbbi években azonban egy minden korábbinál fontosabb alkalmazási terület emelkedett ki a lineáris algebrára támaszkodó alkalmazott tudományok és technológiák közül. Ez a mesterséges intelligencia tudománya ill. fejlesztése, ezen belül különösen a nagy nyelvi modellek, mélytanulás vagy a neurális hálók.

Mi haszna a lineáris algebrának???

Amiről itt és most nem esik szó: koordinátageometria, konvex alakzatok geometriája ill. lineáris célfüggvény optimalizálását előíró feladatok megoldása. Ezek mindegyike (számos másik mellett) a lineáris algebra fontos, gyakorlati problémák megoldásában is nélkülözhetetlen alkalmazási területe.

Az utóbbi években azonban egy minden korábbinál fontosabb alkalmazási terület emelkedett ki a lineáris algebrára támaszkodó alkalmazott tudományok és technológiák közül. Ez a mesterséges intelligencia tudománya ill. fejlesztése, ezen belül különösen a nagy nyelvi modellek, mélytanulás vagy a neurális hálók.

A **matematikailag** különösen érdekes alkalmazások általában abból fakadnak, hogy egy lineáris algebrától látszólag távol álló feladatról derül ki, hogy megfogalmazható lineáris algebrai terminológiával. Az ezen kapcsolat révén rendelkezésre álló eszközök pedig jóval hatékonyabbak lehetnek, mint az eredeti feladat témakörében szokásosak. Akár a legegyszerűbb lineáris eszköz is (mint amilyen pl. az FG-egyenlőtlenség) alkalmas lehet nehéz tételek meglepően egyszerű igazolására.

Mi haszna a lineáris algebrának???

Amiről itt és most nem esik szó: koordináta geometria, konvex alakzatok geometriája ill. lineáris célfüggvény optimalizálását előíró feladatok megoldása. Ezek mindegyike (számos másik mellett) a lineáris algebra fontos, gyakorlati problémák megoldásában is nélkülözhetetlen alkalmazási területe.

Az utóbbi években azonban egy minden korábbinál fontosabb alkalmazási terület emelkedett ki a lineáris algebrára támaszkodó alkalmazott tudományok és technológiák közül. Ez a mesterséges intelligencia tudománya ill. fejlesztése, ezen belül különösen a nagy nyelvi modellek, mélytanulás vagy a neurális hálók.

A **matematikailag** különösen érdekes alkalmazások általában abból fakadnak, hogy egy lineáris algebrától látszólag távol álló feladatról derül ki, hogy megfogalmazható lineáris algebrai terminológiával. Az ezen kapcsolat révén rendelkezésre álló eszközök pedig jóval hatékonyabbak lehetnek, mint az eredeti feladat témakörében szokásosak. Akár a legegyszerűbb lineáris eszköz is (mint amilyen pl. az FG-egyenlőtlenség) alkalmas lehet nehéz tételek meglepően egyszerű igazolására.

Buta kérdés: Egy n -elemű alaphalmazból legfeljebb hány részhalmazt lehet úgy kiválasztani, hogy bármely két kiválasztott részhalmaznak pontosan ugyanannyi közös eleme legyen?

Mi haszna a lineáris algebrának???

Buta kérdés: Egy n -elemű alaphalmazból legfeljebb hány részhalmazt lehet úgy kiválasztani, hogy bármely két kiválasztott részhalmaznak pontosan ugyanannyi közös eleme legyen?

Mi haszna a lineáris algebrának???

Buta kérdés: Egy n -elemű alaphalmazból legfeljebb hány részhalmazt lehet úgy kiválasztani, hogy bármely két kiválasztott részhalmaznak pontosan ugyanannyi közös eleme legyen?

Fisher-egyenlőtlenség: Ha az $\emptyset \neq A_1, A_2, \dots, A_k \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ halmazokra teljesül, hogy $\forall 0 < i < j \leq k$ esetén $A_i \neq A_j$ és $|A_i \cap A_j| = \lambda$, akkor $k \leq n$.

Mi haszna a lineáris algebrának???

Buta kérdés: Egy n -elemű alaphalmazból legfeljebb hány részhalmazt lehet úgy kiválasztani, hogy bármely két kiválasztott részhalmaznak pontosan ugyanannyi közös eleme legyen?

Fisher-egyenlőtlenség: Ha az $\emptyset \neq A_1, A_2, \dots, A_k \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ halmazokra teljesül, hogy $\forall 0 < i < j \leq k$ esetén $A_i \neq A_j$ és $|A_i \cap A_j| = \lambda$, akkor $k \leq n$.

Biz:

1. eset: $\lambda = 0$

Ekkor az $A_1, \dots, A_k$ halmazok diszjunktak, és az állítás triviális, hisz $|A_i| \geq 1 \forall i$.

2. eset: $\lambda \geq 1$ Világos, hogy $|A_i| \geq \lambda \forall 1 \leq i \leq k$. Ha mondjuk $|A_1| = \lambda$, akkor $A_1 \subseteq A_j \forall j \neq 1$. Ezért az $A_2, \dots, A_n$ halmazok A_1 -en kívüli része egymástól diszjunkt, így a darabszámuk legfeljebb $n - \lambda$. Ebből pedig $k \leq n - \lambda + 1 \leq n$ adódik.

Ezért mostantól feltesszük, hogy $|A_i| > \lambda$ teljesül az $A_1, \dots, A_k$ halmazok mindegyikére.

Mi haszna a lineáris algebrának???

Buta kérdés: Egy n -elemű alaphalmazból legfeljebb hány részhalmazt lehet úgy kiválasztani, hogy bármely két kiválasztott részhalmaznak pontosan ugyanannyi közös eleme legyen?

Fisher-egyenlőtlenség: Ha az $\emptyset \neq A_1, A_2, \dots, A_k \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ halmazokra teljesül, hogy $\forall 0 < i < j \leq k$ esetén $A_i \neq A_j$ és $|A_i \cap A_j| = \lambda$, akkor $k \leq n$.

Biz:

Mi haszna a lineáris algebrának???

Buta kérdés: Egy n -elemű alaphalmazból legfeljebb hány részhalmazt lehet úgy kiválasztani, hogy bármely két kiválasztott részhalmaznak pontosan ugyanannyi közös eleme legyen?

Fisher-egyenlőtlenség: Ha az $\emptyset \neq A_1, A_2, \dots, A_k \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ halmazokra teljesül, hogy $\forall 0 < i < j \leq k$ esetén $A_i \neq A_j$ és $|A_i \cap A_j| = \lambda$, akkor $k \leq n$.

Biz:

Legyen $|A_i| = \lambda + \mu_i$, ahol $\mu_i > 0 \forall 1 \leq i \leq k$.

Mi haszna a lineáris algebrának???

Buta kérdés: Egy n -elemű alaphalmazból legfeljebb hány részhalmazt lehet úgy kiválasztani, hogy bármely két kiválasztott részhalmaznak pontosan ugyanannyi közös eleme legyen?

Fisher-egyenlőtlenség: Ha az $\emptyset \neq A_1, A_2, \dots, A_k \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ halmazokra teljesül, hogy $\forall 0 < i < j \leq k$ esetén $A_i \neq A_j$ és $|A_i \cap A_j| = \lambda$, akkor $k \leq n$.

Biz:

Legyen $|A_i| = \lambda + \mu_i$, ahol $\mu_i > 0 \forall 1 \leq i \leq k$.

Jelölje rendre $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k$ az $A_1, \dots, A_k$ halmazok karakterisztikus vektorát, azaz

$$\underline{a}_i = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \vdots \\ \chi_n \end{pmatrix}, \text{ ahol } \chi_j = \begin{cases} 1 & \text{ha } x_j \in A_i \\ 0 & \text{ha } x_j \notin A_i \end{cases}.$$

Például $n = 4, A_1 = \{x_2, x_4\}, A_2 = \{x_1, x_3, x_4\}$ esetén $\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Mi haszna a lineáris algebrának???

Buta kérdés: Egy n -elemű alaphalmazból legfeljebb hány részhalmazt lehet úgy kiválasztani, hogy bármely két kiválasztott részhalmaznak pontosan ugyanannyi közös eleme legyen?

Fisher-egyenlőtlenség: Ha az $\emptyset \neq A_1, A_2, \dots, A_k \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ halmazokra teljesül, hogy $\forall 0 < i < j \leq k$ esetén $A_i \neq A_j$ és $|A_i \cap A_j| = \lambda$, akkor $k \leq n$.

Biz:

Legyen $|A_i| = \lambda + \mu_i$, ahol $\mu_i > 0 \forall 1 \leq i \leq k$.

Jelölje rendre $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k$ az $A_1, \dots, A_k$ halmazok karakterisztikus vektorát, azaz

$$\underline{a}_i = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \vdots \\ \chi_n \end{pmatrix}, \text{ ahol } \chi_j = \begin{cases} 1 & \text{ha } x_j \in A_i \\ 0 & \text{ha } x_j \notin A_i \end{cases}.$$

Mi haszna a lineáris algebrának???

Buta kérdés: Egy n -elemű alaphalmazból legfeljebb hány részhalmazt lehet úgy kiválasztani, hogy bármely két kiválasztott részhalmaznak pontosan ugyanannyi közös eleme legyen?

Fisher-egyenlőtlenség: Ha az $\emptyset \neq A_1, A_2, \dots, A_k \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ halmazokra teljesül, hogy $\forall 0 < i < j \leq k$ esetén $A_i \neq A_j$ és $|A_i \cap A_j| = \lambda$, akkor $k \leq n$.

Biz:

Legyen $|A_i| = \lambda + \mu_i$, ahol $\mu_i > 0 \ \forall 1 \leq i \leq k$.

Jelölje rendre $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k$ az $A_1, \dots, A_k$ halmazok karakterisztikus vektorát, azaz

$$\underline{a}_i = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \vdots \\ \chi_n \end{pmatrix}, \text{ ahol } \chi_j = \begin{cases} 1 & \text{ha } x_j \in A_i \\ 0 & \text{ha } x_j \notin A_i \end{cases}.$$

Megmutatjuk, hogy az $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k$ vektorok lin.ftn-ek. Ekkor ugyanis az FG-egyenlőtlenség miatt $k \leq \dim \mathbb{R}^n = n$.

Mi haszna a lineáris algebrának???

Buta kérdés: Egy n -elemű alaphalmazból legfeljebb hány részhalmazt lehet úgy kiválasztani, hogy bármely két kiválasztott részhalmaznak pontosan ugyanannyi közös eleme legyen?

Fisher-egyenlőtlenség: Ha az $\emptyset \neq A_1, A_2, \dots, A_k \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ halmazokra teljesül, hogy $\forall 0 < i < j \leq k$ esetén $A_i \neq A_j$ és $|A_i \cap A_j| = \lambda$, akkor $k \leq n$.

Biz:

Legyen $|A_i| = \lambda + \mu_i$, ahol $\mu_i > 0 \forall 1 \leq i \leq k$.

Jelölje rendre $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k$ az $A_1, \dots, A_k$ halmazok karakterisztikus vektorát, azaz

$$\underline{a}_i = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \vdots \\ \chi_n \end{pmatrix}, \text{ ahol } \chi_j = \begin{cases} 1 & \text{ha } x_j \in A_i \\ 0 & \text{ha } x_j \notin A_i \end{cases}.$$

Megmutatjuk, hogy az $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k$ vektorok lin.ftn-ek. Ekkor ugyanis az FG-egyenlőtlenség miatt $k \leq \dim \mathbb{R}^n = n$.

Tf h $\lambda_1 \underline{a}_1 + \dots + \lambda_k \underline{a}_k = \underline{0}$. A bal oldali vektorok A_j elemeinek megfelelő koordinátáinak összegére $\mu_j \lambda_j + \lambda \cdot \sum_{i=1}^k \lambda_i = 0$ adódik.

Mi haszna a lineáris algebrának???

Buta kérdés: Egy n -elemű alaphalmazból legfeljebb hány részhalmazt lehet úgy kiválasztani, hogy bármely két kiválasztott részhalmaznak pontosan ugyanannyi közös eleme legyen?

Fisher-egyenlőtlenség: Ha az $\emptyset \neq A_1, A_2, \dots, A_k \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ halmazokra teljesül, hogy $\forall 0 < i < j \leq k$ esetén $A_i \neq A_j$ és $|A_i \cap A_j| = \lambda$, akkor $k \leq n$.

Biz:

Legyen $|A_i| = \lambda + \mu_i$, ahol $\mu_i > 0 \forall 1 \leq i \leq k$.

Jelölje rendre $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k$ az $A_1, \dots, A_k$ halmazok karakterisztikus vektorát, azaz

$$\underline{a}_i = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \text{ ahol } x_j = \begin{cases} 1 & \text{ha } x_j \in A_i \\ 0 & \text{ha } x_j \notin A_i \end{cases}.$$

Megmutatjuk, hogy az $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k$ vektorok lin.ftn-ek. Ekkor ugyanis az FG-egyenlőtlenség miatt $k \leq \dim \mathbb{R}^n = n$.

Tf h $\lambda_1 \underline{a}_1 + \dots + \lambda_k \underline{a}_k = \underline{0}$. A bal oldali vektorok A_j elemeinek megfelelő koordinátáinak összegére $\mu_j \lambda_j + \lambda \cdot \sum_{i=1}^k \lambda_i = 0$ adódik.

Ha $\sum_{i=1}^k \lambda_i > 0$, akkor $\lambda_j < 0 \forall j$, így $\sum_{i=1}^k \lambda_i < 0$, ellentmondás.

Mi haszna a lineáris algebrának???

Buta kérdés: Egy n -elemű alaphalmazból legfeljebb hány részhalmazt lehet úgy kiválasztani, hogy bármely két kiválasztott részhalmaznak pontosan ugyanannyi közös eleme legyen?

Fisher-egyenlőtlenség: Ha az $\emptyset \neq A_1, A_2, \dots, A_k \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ halmazokra teljesül, hogy $\forall 0 < i < j \leq k$ esetén $A_i \neq A_j$ és $|A_i \cap A_j| = \lambda$, akkor $k \leq n$.

Biz:

Legyen $|A_i| = \lambda + \mu_i$, ahol $\mu_i > 0 \forall 1 \leq i \leq k$.

Jelölje rendre $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k$ az $A_1, \dots, A_k$ halmazok karakterisztikus vektorát, azaz

$$\underline{a}_i = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \text{ ahol } x_j = \begin{cases} 1 & \text{ha } x_j \in A_i \\ 0 & \text{ha } x_j \notin A_i \end{cases}.$$

Megmutatjuk, hogy az $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k$ vektorok lin.ftn-ek. Ekkor ugyanis az FG-egyenlőtlenség miatt $k \leq \dim \mathbb{R}^n = n$.

Tf h $\lambda_1 \underline{a}_1 + \dots + \lambda_k \underline{a}_k = \underline{0}$. A bal oldali vektorok A_j elemeinek megfelelő koordinátáinak összegére $\mu_j \lambda_j + \lambda \cdot \sum_{i=1}^k \lambda_i = 0$ adódik.

Ha $\sum_{i=1}^k \lambda_i > 0$, akkor $\lambda_j < 0 \forall j$, így $\sum_{i=1}^k \lambda_i < 0$, ellentmondás.

Ha pedig $\sum_{i=1}^k \lambda_i < 0$, akkor $\lambda_j > 0 \forall j$, így ez sem lehetséges.

Mi haszna a lineáris algebrának???

Buta kérdés: Egy n -elemű alaphalmazból legfeljebb hány részhalmazt lehet úgy kiválasztani, hogy bármely két kiválasztott részhalmaznak pontosan ugyanannyi közös eleme legyen?

Fisher-egyenlőtlenség: Ha az $\emptyset \neq A_1, A_2, \dots, A_k \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ halmazokra teljesül, hogy $\forall 0 < i < j \leq k$ esetén $A_i \neq A_j$ és $|A_i \cap A_j| = \lambda$, akkor $k \leq n$.

Biz:

Legyen $|A_i| = \lambda + \mu_i$, ahol $\mu_i > 0 \forall 1 \leq i \leq k$.

Jelölje rendre $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k$ az $A_1, \dots, A_k$ halmazok karakterisztikus vektorát, azaz

$$\underline{a}_i = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \text{ ahol } x_j = \begin{cases} 1 & \text{ha } x_j \in A_i \\ 0 & \text{ha } x_j \notin A_i \end{cases}.$$

Megmutatjuk, hogy az $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k$ vektorok lin.ftn-ek. Ekkor ugyanis az FG-egyenlőtlenség miatt $k \leq \dim \mathbb{R}^n = n$.

Tf h $\lambda_1 \underline{a}_1 + \dots + \lambda_k \underline{a}_k = \underline{0}$. A bal oldali vektorok A_j elemeinek megfelelő koordinátáinak összegére $\mu_j \lambda_j + \lambda \cdot \sum_{i=1}^k \lambda_i = 0$ adódik.

Ha $\sum_{i=1}^k \lambda_i > 0$, akkor $\lambda_j < 0 \forall j$, így $\sum_{i=1}^k \lambda_i < 0$, ellentmondás.

Ha pedig $\sum_{i=1}^k \lambda_i < 0$, akkor $\lambda_j > 0 \forall j$, így ez sem lehetséges.

Végül, ha $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 0$, akkor $\lambda_j = 0 \forall j$. Ezért az $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k$ vektorok csakugyan lin.ftn-ek. □

Mit tanultunk ma?

- ▶ RLA mátrix oszlopainak tulajdonsága

Mit tanultunk ma?

- ▶ RLA mátrix oszlopainak tulajdonsága
- ▶ ESÁ hatása a mátrix soraira és oszlopaira

Mit tanultunk ma?

- ▶ RLA mátrix oszlopainak tulajdonsága
- ▶ ESÁ hatása a mátrix soraira és oszlopaira
- ▶ Lin. ftnség eldöntése, bázis és koordinátavektor számítása varázslással

Mit tanultunk ma?

- ▶ RLA mátrix oszlopainak tulajdonsága
- ▶ ESÁ hatása a mátrix soraira és oszlopaira
- ▶ Lin. ftnség eldöntése, bázis és koordinátavektor számítása varázslással
- ▶ Egészen fura célokra is használható a linalgbra

Mit tanultunk ma?

- ▶ RLA mátrix oszlopainak tulajdonsága
- ▶ ESÁ hatása a mátrix soraira és oszlopaira
- ▶ Lin. ftnség eldöntése, bázis és koordinátavektor számítása varázslással
- ▶ Egészen fura célokra is használható a linalgbra

Köszönöm a figyelmet!