A Számítástudomány alapjai

2. pZH javítókulcs (2023. 12. 13.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.
Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Van-e olyan megoldása az alábbi egyenletrendszernek, ahol $x_3 = 2x_4 - 1$? Ha igen, akkor határozzuk meg az összes ilyen megoldást!

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_4 &= 5 \\ 2x_1 + 7x_2 + x_3 - 3x_4 &= 6 \\ 2x_1 + 8x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 5 \end{aligned}$$

Kibővített együtthatómátrixot készítünk, és azon végzünk ESÁ-okat mindaddig, míg RLA mátrixot nem kapunk: (2 pont)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -2 & 5 \\ 2 & 7 & 1 & -3 & 6 \\ 2 & 8 & 2 & -3 & 5 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & -5 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

(4 pont)

Ezek szerint a megoldás $x_3 \in \mathbb{R}$ tetszőleges és $x_1 = 2 + 3x_3$, $x_2 = -1 - x_3$ ill. $x_4 = -3$. (2 pont)
Ha tehát $x_3 = 2x_4 - 1$, akkor $x_3 = -7$, és ennek megfelelően $x_1 = -19$, $x_2 = 6$ ill. $x_4 = -3$ adódik. (1 pont)
A feladat kérdésére tehát igenlő a válasz, és a fenti leírt az egyetlen szóba jövő megoldás. (1 pont)

Avagy.

Ha az $x_3 - 2x_4 = -1$ egyenlet hozzáadásával nyert egyenletrendszert oldjuk meg, akkor is korrekt választ kapunk a feladat kérdésére. (3 pont)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -2 & 5 \\ 2 & 7 & 1 & -3 & 6 \\ 2 & 8 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \mapsto$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -19 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

(4 pont)

A feladatban leírt feltétel mellet pontosan egy megoldás kapott egyetlen megoldás létezik, mégpedig az $x_1 = -19$, $x_2 = 6$, $x_3 = -7$, $x_4 = -3$. (3 pont)

2. Altér-e $\mathbb{R}^3$-ban a $V = \{(x, y, z)^\top : x + y + 2z \geq 0\}$ vektorhalmaz?

A V részhalmaz pontosan akkor altér, ha sem az összeadás, sem a skalárral szorzás nem vezet ki belőle. (2 pont)
A konkrét V halmazból azonban kivezet a skalárral való szorzás, ugyanis $(1, 0, 0)^\top \in V$, azonban $-1 \cdot (1, 0, 0)^\top = (-1, 0, 0)^\top \notin V$, (7 pont)
ezért V nem altere $\mathbb{R}^3$-nak. (1 pont)

Ha valaki tudja, mi az altér (azaz megszerzi az első 2 pontot), és igazolja V összeadásra zárt tulajdonságát, akkor azért további 4 pontot kapható.

3. Döntsük el, hogy benne van-e a $\underline{z}$ vektor a $V := \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \rangle$ vektortérben. Ha igen, akkor határozzuk meg z koordinátavektorát a V-nek egy, az $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ vektorokból választott valamely bázisában, ahol $\underline{u} = (1, 2, -1)^\top$, $\underline{v} = (-2, -3, 3)^\top$, $\underline{w} = (2, 1, -4)^\top$, és $\underline{z} = (-6, -5, 10)^\top$!

Azt kell eldöntenünk, hogy teljesül-e a $\underline{z} \in \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \rangle$ tulajdonság, és ha igen, akkor $\underline{z}$-t elő kell állítanunk egy, az $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ vektorokból választott bázis elemeinek lineáris kombinációjaként. (2 pont)
Ehhez elkészítjük az $(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{z})$ mátrixot, és megvizsgáljuk, hogy az utolsó oszlop előáll-e az előtte álló oszlopok lineáris kombinációjaként. Ehhez ESÁ-okat hajtunk végre, és felhasználjuk, hogy egy ilyen lépés nem változtat az oszlopok közötti lineáris összefüggőségeken. (2 pont)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -6 \\ 2 & -3 & 1 & -5 \\ -1 & 3 & -4 & 10 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$ (3 pont)

A kapott RLA mátrix első három oszlopa lineárisan független és generálja az utolsót, (1 pont)
ezért $\underline{z} \in V$ (1 pont)
és a keresebb B bázist az $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ vektorok alkotják. Ebben a bázisban a kérdezett koordinátavektor a kapott mátrix utolsó oszlopa: $[\underline{z}]_B = (-4, -2, -3)^\top$. (1 pont)

4. Számítsuk ki a $\begin{vmatrix} 1 & 2p-1 & 2 \\ 2 & 4p-1 & 1 \\ -1 & 1-2p & -1 \end{vmatrix}$ determináns értékét a p paraméter értékének függvényében!

Egy sor konstansszorosának hozzáadása/kivonása egy másik sorból nem változtat a determináns értékén, (2 pont)
valamint felső háromszögmátrix determinánsa a főátlóbeli elemei szorzata. (2 pont)
így $\begin{vmatrix} 1 & 2p-1 & 2 \\ 2 & 4p-1 & 1 \\ -1 & 1-2p & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2p-1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$. (6 pont)

5. Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Van-e olyan C mátrix, amire $CA = B$ teljesül? Ha igen, akkor határozzunk meg egy ilyen C mátrixot!

Az A mátrix 3-dik oszlopa megegyezik az A mátrix első és második oszlopának összegével. (2 pont)
Ezért ha értelmes a CA mátrixszorzás, akkor a CA szorzatmátrix minden sora az A mátrix sorainak lineáris kombinációja. Ezért az A mátrix fenti tulajdonságának a CA mátrixra is teljesülnie kell. (5 pont)
Mivel azonban a B mátrix 3-dik oszlopa nem egyezik meg a B mátrix első két oszlopának összegével, (2 pont)
ezért nincs olyan C mátrix, amire $CA = B$ teljesül. (1 pont)

Teljes értékű megoldás az is, ha izomból állunk neki a dolognak:

Világos, hogy $C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, ezért feltehető, hogy $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ (1 pont)
A mátrixszorzás definíciója alapján az alábbiak teljesülnek:

$1a + 0b = 2, 1c + 0d = 1, 0a + 1b = -1, 0c + 1d = 1, a + b = -1, c + d = 1$ (4 pont)
Az első négy egyenletből $a = 2, b = -1, c = 1, d = 1$, (2 pont)
azonban ekkor $a + b = 1$, ami ellentmond az 5-dik egyenletnek. (2 pont)
Ezért nem létezik a feladatban leírt tulajdonságú C mátrix. (1 pont)

$\boxed{\star}$ Tegyük fel, hogy az $A \in \mathbb{R}^{42\times 42}$ mátrix determinánsa $|A| = 42$. Képezzük az A' mátrixot A-ból úgy, hogy (-1)-gyel megszorozzuk A minden páratlanodik sorának minden páratlanodik elemét és minden párosodik sorának minden párosodik elemét. Határozzuk meg az így kapott A' mátrix determinánsát!

Az A' mátrixot megkaphatjuk A-ból úgy is, hogy az A páratlanodik sorait és párosodik oszlopait megszorozzuk (-1)-gyel. (7 pont)
Ezért $|A'|$ megkapható úgy is, hogy $|A|$-t összesen 42-szer szorozzuk meg (-1)-gyel. (2 pont)
Ennek megfelelően $|A'| = (-1)^{42} \cdot |A| = |A| = 42$. (1 pont)