A Számítástudomány alapjai

2. ZH javítókulcs (2023. 11. 30.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.
Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Van-e olyan megoldása az alábbi egyenletrendszernek, ahol $x_3 = 4$? Ha igen, akkor egy ilyen megoldás mellett milyen értéket vehet fel az x_1x_2 szorzat?

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 9 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 &= 27 \\ 4x_1 + 6x_2 - 7x_3 + 3x_4 &= 42 \end{aligned}$$

Kibővített együtthatómátrixot készítünk, és azon végzünk ESÁ-okat mindaddig, míg RLA mátrixot nem kapunk: (2 pont)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 9 \\ 3 & 1 & 1 & -2 & 27 \\ 4 & 6 & -7 & 3 & 42 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 9 \\ 0 & -2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 3 & 6 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 3 & 6 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

(4 pont)

Ezek szerint a megoldás $x_4 \in \mathbb{R}$ tetszőleges és $x_1 = 3 + 2x_4$, $x_2 = 12 - 3x_4$ ill. $x_3 = 6 - x_4$. (2 pont)
Ekkor $x_3 = 4 \iff 6 - x_4 = 4 \iff x_4 = 2$. Ezért pontosan egy olyan megoldása van az egyenletrendszernek, ahol $x_3 = 4$, így az első kérdésre igenlő a válasz. (1 pont)
Ennél a megoldásnál $x_1 = 7, x_2 = 6$, azaz $x_1x_2 = 42$ a válasz a második kérdésre. (1 pont)

Avagy.

Ha úgy próbáljuk megoldani az egyenletrendszert, hogy rögzítjük az $x_3 = 4$ értéket, akkor is minden kérdezett megoldást megkapunk, és még számolni is kevesebbet kell. (3 pont)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 13 \\ 3 & 1 & -2 & 23 \\ 4 & 6 & 3 & 70 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 13 \\ 0 & -2 & -2 & -16 \\ 0 & 2 & 3 & 18 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 3 & 18 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

(4 pont)

Az $x_3 = 4$ mellett kapott egyetlen megoldás az $x_1 = 7, x_2 = 6, x_4 = 2$, tehát az első kérdésre „igen” a válasz. (2 pont)
Ekkor pedig $x_1x_2 = 42$ az egyetlen lehetséges érték. (1 pont)

2. Alteret alkotnak-e $\mathbb{R}^4$-ben azok az $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^\top$ oszlopvektorok, amelyekre x_1, x_2, x_3, x_4 vagy x_2, x_3, x_4, x_1 számtani sorozatot alkot?

Vektorok egy V halmaza pontosan akkor alkot alteret, ha V zárt a vektorösszeadásra és a skalárral szorzásra. (1 pont)
Úgy igazoljuk, hogy nem alkot alteret a kérdezett vektorhalmaz, hogy megmutatjuk, hogy a vektorösszeadás kivezet ebből halmazból. (4 pont)
Világos, hogy pl az $\underline{x} = (0, 1, 2, 3)^\top$ és az $\underline{y} = (3, 0, 1, 2)^\top$ vektorok benne vannak a kérdezett halmazban, ám összegük $\underline{x} + \underline{y} = (3, 1, 3, 5)^\top$ nincs benne, tehát a vektorösszeadás kivezet a halmazból, nem alkotnak alteret a kérdezett vektorok. (5 pont)

Bár ez közvetlenül nem járul hozzá egy helyes megoldáshoz, de ha egy megoldó (hiánytalanul) megmutatja, hogy tetszőleges $\underline{v} \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $\lambda v \in V$ is teljesül (ahol V a kérdezett vektorhalmaz), akkor ezért 4 pontot kaphat; ha pedig a megoldásban nyoma van annak, hogy az összeadásra való zártságot is elkezdi vizsgálni (és nem csak felírja), akkor ezért további 1 pont adható.

3. Generátorrendszert alkotnak-e $\mathbb{R}^4$-ben az $\underline{u} = (-1, 2, 4, 8)^\top$, $\underline{v} = (1, 3, 9, 27)^\top$ és $\underline{w} = (4, 2, 42, 24)^\top$ oszlopvektorok?

Tanultuk, hogy $\mathbb{R}^4$-ben az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ és $\underline{e}_4$ vektorok alkotják a standard bázist. (1 pont)
Ezek a vektorok tehát $\mathbb{R}^4$-ben lineárisan független rendszert alkotnak. (2 pont)

A tanult FG-egyenlőtlenség szerint tetszőleges V altér generátorrendszerének mérete legalább akkora, mint az altér bármely lineárisan független rendszerének mérete. (4 pont)
Ez azt jelenti, hogy $\mathbb{R}^4$ bármely generátorrendszerének legalább 4 vektort kell tartalmaznia. (2 pont)
Ezek szerint a kérdezett három vektor bizonyosan nem alkot $\mathbb{R}^4$-ben generátorrendszert. (1 pont)

Az is tökéletes megoldás, ha valaki kimutatja egy alkalmas $\mathbb{R}^4$-beli vektorról (pl $\underline{e}_1$-ről), hogy nem generálja a három megadott vektor. Ezt pedig a szóban forgó vektorok alkotta mátrix LA hozásával lehet könnyen látni.

4. Számítsuk ki az $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 9 & 10 \\ 9 & 81 & 100 \end{vmatrix}$ determináns értékét!

Elemi sorekvivalens átalakítások segítségével LA mátrixot képezünk, (1 pont)
ennek során sor konstansszorosának másik sorhoz történő hozzáadásakor/levonásakor a determináns nem változik, (3 pont)
LA mátrix determinánsa pedig a főátlóbeli elemek szorzata. (3 pont)
A konrét számolás: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 9 & 10 \\ 9 & 81 & 100 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 7 \\ 0 & 72 & 91 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 42$ (3 pont)

Természetesen számos más, elméletileg helyes módszerrel is ki lehet számítani a determinánst. A Sarrus-szabály elhangzott a délutáni előadáson, ezért ha azt valaki helyesen hivatkozza és használja, akkor is teljes pontszámot kap. Ha csak simán a 6-féle bástyaelhelyezéssel számol, akkor indoklásra szorul, hogy mi is az egyes kifejtési tagok előjele.

5. Egy ásatáson feltárt kőtáblán egy $AB = C$ mátrixszorzás szerepel, de a $\boxed{?}$-t tartalmazó mezők nem olvashatók ki, csak az alábbiak látszanak: $A = \begin{pmatrix} \boxed{?} & -2 \\ \boxed{?} & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ \boxed{?} & 1 & \boxed{?} \end{pmatrix}$ és $C = \begin{pmatrix} 12 & \boxed{?} & -11 \\ -1 & -2 & \boxed{\mathbf{?}} \end{pmatrix}$.
Határozzuk meg a C mátrix jobb alsó elemét!

Ha rendre A_i, B^j és C_i^j jelöli az A mátrix i-dik sorát, a B mátrix j-dik oszlopát ill. a C mátrix i-dik sorának j-dik elemét, akkor $C_i^j = A_i \cdot B^j$, azaz a C mátrix elemei az A mátrix megfelelő sorának és a B mátrix megfelelő oszlopának skalárszozataként kaphatók. (1 pont)
A C_2^2 elem miatt az A mátrix második sorának első eleme 7, (1 pont)
A C_2^1 elem miatt a B mátrix második sorának első eleme -3, (2 pont)
A C_1^1 elem miatt az A mátrix első sorának első eleme 3, (2 pont)
Ekkor a C_1^3 elem miatt a B mátrix második sorának harmadik eleme 7, (2 pont)
ezért $C_1^3 = A_1 \cdot B^3 = 7 \cdot 1 + 5 \cdot 7 = 42$ a válasz a kérdésre. (2 pont)

Egyébként így néz ki kőtáblára eredetileg felírt mátrixszorzás:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ \mathbf{-3} & 1 & \mathbf{7} \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} \mathbf{3} & -2 \\ \mathbf{7} & 5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 12 & \mathbf{-5} & -11 \\ -1 & -2 & \mathbf{42} \end{pmatrix} \end{array}$$

$\boxed{\star}$ Legyen $f(p,q) := \begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & q \\ p & 1 & 42 & 3 \\ 8 & 6 & 1 & -1 \end{vmatrix}$. Rögzíthető-e a q paraméter értéke úgy, hogy $f(p,q)$ ne függjön p-től, azaz $f(p_1,q) = f(p_2,q)$ teljesüljön tetszőleges p_1, p_2 esetén? Ha igen, akkor adjuk meg az összes ilyen q paraméterértéket!

Az első oszlop (vagy a harmadik sor) szerinti kifejtésből az látszik, hogy $f(p)$ pontosan akkor nem függ p-től ha a p-hez tartozó előjeles aldeterminánsértéke 0. (4 pont)
Konkrétan ez azt jelenti, hogy $0 = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & q \\ 6 & 1 & -1 \end{vmatrix}$, (2 pont)
amit az utosó oszlop szerint kifejtve $0 = -q\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = -q \cdot (7-6) - 1 \cdot (42-0) = -q - 42$ adódik. (2 pont)
Ezek szerint a feladat kérdésére igenlő a válasz, a q paraméter keresett értéke pedig egyedül a $q = -42$. (2 pont)