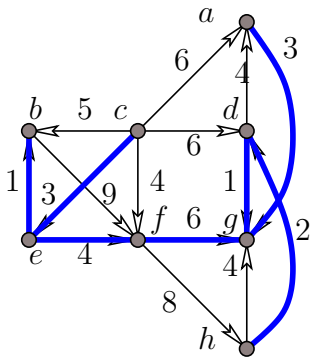
A Számítástudomány alapjai

1. pZH javítókulcs (2023. 11. 20.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.
Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Legyen G az ábrán látható gráf **irányítatlan** változata. Határozzuk meg a G gráf egy minimális költségű feszítőfáját, és dokumentáljuk az algoritmus futását. Lehetséges-e egy 6 költségű él költségét 22-re növelni úgy, hogy az új költségfüggvény szerint minimális költségű feszítőfa költsége ugyanannyi maradjon, mint amennyi az eredeti költségfüggvény esetén volt?

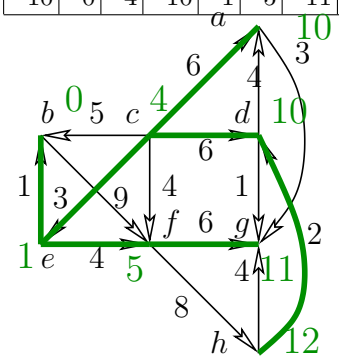


Az órán tanult Kruskal-algoritmus segítségével elkészítünk egy mkffát az élek bevételéről növekvő költség szerint egyenként döntve, egy élt akkor bevéve a feszítőfába, ha nem alkot kört korábban bevett élekkel. Az ábra egy ilyen F fát mutat. Az F ffa a költsége 20. (7 pont)
Ha a ca él 6-os költségét 22-re növeljük, akkor az imént kapott fa költsége 20 marad, továbbá a növelés hatására egyetlen feszítőfa költsége sem csökken. Ezért F minimális költségű feszítőfa lesz a költségnövelés után is, így a feladat második részének kérdésére „igen” a válasz. (3 pont)

2. Legyen G az ábrán látható gráf **irányítatlan** változata. Futtassuk le a G gráfra a Dijkstra-algoritmust a b gyökérből. Határozzuk meg a c, d, f és g csúcsok U_i (KÉSZ) halmazba kerülésének összes lehetséges egymás közti sorrendjét egy b-ből indított Dijkstra algoritmus lefutásakor.

a	b	c	d	e	f	g	h
∞	$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞
∞	0	5	∞	$\boxed{1}$	9	∞	∞
∞	0	$\boxed{4}$	∞	1	5	∞	∞
10	0	4	10	1	$\boxed{5}$	∞	∞
$\boxed{10}$	0	4	10	1	5	11	13
10	0	4	$\boxed{10}$	1	5	11	13
10	0	4	10	1	5	$\boxed{11}$	12
10	0	4	10	1	5	11	$\boxed{12}$

Futtassuk le G-re a Dijkstra-algoritmust a b gyökérből. A (b, ℓ)-felső becslés változását a mellékelt táblázat tartalmazza, valamint az ábrán megjelöltük a végső becslésértéket beállító éleket, (7 pont)
amelyek a b gyökérből egy legrövidebb utak fáját alkotják. (0 pont)
Az órán azt tanították , hogy a Dijkstra-algoritmus során az egyes a KÉSZ halmazba kerülő csúcsok gyökértől mért távolsága monoton növekszik. (2 pont)
Mivel a vizsgált négy csúcsra ezek a távolságok páronként különbözők, ezért csupán egyetlenegy lehetséges sorrendje van a feldolgozásuknak, nevezetesen a c, f, d, g. (1 pont)

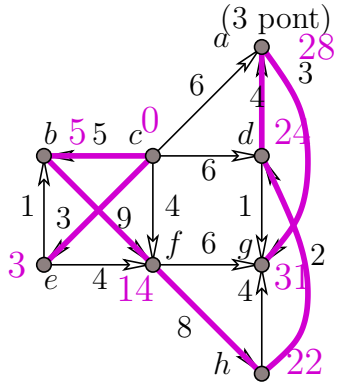


Az utolsó 3 pont úgy is megszerezhető, ha a hallgató rámutat, hogy a Dijkstra-algoritmus különböző futtatásai csupán annyiban térhetnek el egymástól, hogy az egymást követő a és d csúcsokat milyen sorrendben vesszük a KÉSZ halmazba, de ez nem érinti a kérdezett csúcsok sorrendjét.

3. Határozzuk meg az ábrán látható PERT probléma minimális végrehajtási idejét! Elérhető-e a cd élre írt szám megváltoztatásával, hogy egy korábban kritikus tevékenység a változtatás után ne legyen kritikus?

A G csúcsainak topologikus sorrendjét megkaphatjuk az órán megismert forrástörléses módszerrel. Így adódik a c, e, b, f, h, d, a, g sorrend. (3 pont)
Ebben a sorrendben meghatározva az egyes csúcsokhoz tartozó legkorábbi kezdési időpontokat, az

ábrán az egyes csúcsok mellett látható értékeket kapjuk. Egyúttal lilával megjelöljük azokat az éleket, amelyek az egyes csúcsok mellé írt számokat meghatározzák. (3 pont)



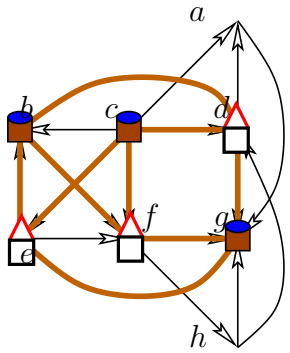
A teljes projekthez szükséges minimális végrehajtási időt tehát a g csúcshoz tartozó 31-es érték határozza meg. (1 pont)
Egyetlen kritikus út van, mégpedig $cbfhdag$. Ennek megfelelően az e tevékenység kivételével minden tevékenység kritikus. (2 pont)
Ha a cd élre írt szám 24-nél több lenne, akkor ezáltal d legkorábbi kezdési időpontja megnőne az a és g csúcsokkal együtt. Ezáltal kizárólag $cdag$ lesz kritikus út, és a b, f, h tevékenységek pedig nem lesznek kritikusak. Tehát a feladat második kérdésére tehát igenlő a válasz. (1 pont)

4. Legyen G az ábrán látható gráf **irányítatlan** változata. Van-e G-nek Hamilton-köre? Ha van, akkor legkevesebb hány élt kell törölni G-ből, hogy a kapott gráfnak ne legyen Hamilton-köre? (Az élekre írt számokkal ne törődjünk.)

G-nek van Hamilton-köre, például a, c, b, e, f, h, g, d ezért a feladat első kérdésére „igen” a válasz. (4 pont)
Ha töröljük a be élt, akkor állítjuk, hogy az így kapott G' gráfnak nem lesz Hamilton-köre. (1 pont)
Ha ugyanis elhagyjuk G'-ből a c és f csúcsokat, akkor b és e izolált pontok lesznek, és az a, d, g, h csúcsok egy harmadik komponenst alkotnak. (2 pont)
A Hamilton-kör létezésére tanult szükséges feltétel tehát nem teljesül a G' gráfra, ezért G'-nek nincs Hamilton-köre. (2 pont)
Mivel 0 él törlése esetén még van G-nek Hamilton-köre, ezért a feladat második kérdésére „egy” a válasz. (1 pont)

Ha valaki a második kérdésre megállapítja, hogy egy harmadfokú csúcsból két élt törolve nem lesz Hamilton-kör, de a helyes választ nem találja meg, akkor erre a részre 1 pontot kaphat.

5. Legyen G az ábrán látható gráf **irányítatlan** változata. Síkbarajzolható-e az a G' gráf, amit G-ből az bd és eg élek behúzásával kapunk? (Az élekre írt számokkal ne törődjünk.)



Ha mutatunk G'-nek egy (topologikus) $K_{3,3}$ részgráfját, akkor a tanultak szerint G' nem síkbarajzolható. (3 pont)
A mellékelt ábra a kérdéses gráfot mutatja. (1 pont)
A megvastagított élek és a megjelölt csúcsok G' egy $K_{3,3}$ részgráfját ábrázolják. Tehát G' nem síkbarajzolható. (6 pont)
Az első rész helyett hivatkozhatunk a (helyesen kimondott) Kuratowski-tételre is.
Van egyébként topologikus K_5 is G-ben, pl a b, c, e, f és g csúcsok az a és d osztópontokkal ilyet alkotnak. Ennek a megtalálása is tökéletes bizonyíték.

★ Legfeljebb hány csúcsa lehet egy olyan G gráfnak, amelynek 123 éle van, és minden élét ki lehet színezni a piros, fehér vagy zöld színek valamelyikére úgy, hogy G bármely két csúcsa között vezessen csupa piros, csupa fehér és csupa zöld élből álló út is?

Jelölje n a G gráf csúcsai számát. A megadott feltétel azt kívánja, hogy piros, a fehér és a zöld élek is egy-egy n-csúcsú összefüggő gráfot alkossnak. (2 pont)
Tudjuk, hogy minden összefüggő gráfnak van feszítőfája, (1 pont)
és bármely n-csúcsú gráf bármely feszítőfája pontosan $n-1$ élt tartalmaz. (2 pont)
Ezért a piros, fehér és zöld élek bármelyikéből legalább $n-1$ van, azaz G éleinek számára $123 \geq 3\cdot(n-1)$ teljesül. (2 pont)
Innen $n \leq 42$ adódik G csúcsszámára, a kérdezett maximális csúcsszám tehát nem lehet több 42-nél. (1 pont)
Ha egy 42-csúcsú út minden élé mellé behúzunk két további párhuzamos élt, és a párhuzamos élhármasokat nemzetiszínűre színezzük, akkor az így élszínezett G gráfra teljesülnek a feladatban leírt feltételek. (1 pont)
Ezért a keresett maximális csúcsszám legalább 42, amit ha a korábbi megállapításunkkal összevetünk, megállapíthatjuk, hogy a feladat kérdésére a válasz pontosan 42. (1 pont)