# A számítástudomány alapjai 2023. I. félév

12. gyakorlat. Összeállította: Fleiner Tamás (`fleiner@cs.bme.hu`)

## Tudnivalók

**Def:** Az $A^B$ mátrix az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix *balinverze*, ha $A^B A = I_n$, az $A^J$ mátrix pedig az $A$ *jobbinverze*, ha $AA^J = I_n$. **Állítás:** Ha $A^B$ és $A^J$ az $A$ bal- ill. jobbinverze, akkor $A^B = A^J$.

**Állítás:** Ha $A$-nak van balinverze, akkor (1) $A^B$ előáll $A$-ból ESÁ-okkal ill. (2) az $(A|I_n)$ mátrixból ESÁ-okkal kapott RLA mátrix $(I_n|A^B)$.
Ha $A$-nak nincs balinverze, akkor az RLA mátrixban van v1 az $n$-dik oszloptól jobbra.

**Állítás:** Tfh $A$ négyzetes mátrix. Ekkor ($A$-nak van balinverze) $\iff$ ($A$ sorai lin.ftn-ek) $\iff$ $(|A| \neq 0) \iff (|A^\top| \neq 0) \iff$ ($A$ oszlopai lin.ftn-ek) $\iff$ ($A$-nak van jobbinverze)

**Def:** Tetsz. $A$ négyzetes mátrix esetén akkor $A^{-1} = A^B = A^J$ jelöli $A$ inverzét (ha van).
Ha $A$-nak van inverze, akkor $A$ *reguláris* (*invertálható*), ha $A$-nak nincs inverze, akkor $A$ *szinguláris*.

**Állítás:** Tfh $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és a $B$ mátrix $i$-dik sorának $j$-dik eleme az $A_{j,i}$ előjeles aldetermináns $\forall 1 \leq i \leq n$, $\forall 1 \leq j \leq n$. Ekkor $AB = |A|I_n$.

**Köv.:** Ha $A$ reguláris, akkor $A^{-1} = \frac{1}{|A|}B$, ahol $B$ az előző állításban definiált mátrix.

**Def:** Az $A$ mátrix $s(A)$ *sorrangja* ($o(A)$ *oszloprangja*) az $A$ lin.ftn sorainak (oszlopainak) max. száma, $d(A)$ *determinánsrangja* a legnagyobb reguláris négyzetes részmátrixa sorainak száma.

**Megfigyelés:** (1) $o(A) = s(A^\top)$ $\forall A$, (2) $s(A)$ ill. $o(A)$ az $A$ sorai ill. oszlopai által generált altér dimenziója $\forall A$. (3) Ha $A$ RLA, akkor $s(A) = o(A) =$ v1-ek száma. (4) ESÁ során nem változtat sem a sor-, sem az oszloprangon. (5) $s(A) = o(A)$ $\forall A$.

**Állítás:** $(s(A) \geq k) \iff (d(A) \geq k)$ **Köv.:** $s(A) = o(A) = d(A)$ $\forall A$.

**Def:** Az $A$ mátrix *rangja* $r(A) = s(A)$.

**Rang meghatározása:** Az $A$-ból ESÁ-okkal képzett (R)LA mátrix v1-ei száma.

**Lemma:** (1) Ha $A, B \in \mathbb{R}^{n\times k}$, akkor $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$.
(2) Ha $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ és $B \in \mathbb{R}^{k\times \ell}$, akkor $r(AB) \leq \min(r(A), r(B))$.

## Gyakorlatok

1. Határozzuk meg a $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ ill. $\begin{pmatrix} 7 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & -7 \\ 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ mátrixok inverzét mindkét tanult módszerrel. Hogyan lehet gyorsan eldönteni egy $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ mátrixról, hogy van-e inverze, és ha van, akkor azt, hogy igaz-e, hogy az inverz minden eleme egész szám?
2. Határozzuk meg a $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -8 & 6 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ill. $\begin{pmatrix} 5 & 15 & -30 & 20 \\ 1 & 0 & -21 & 10 \\ -2 & -8 & p & 2p-8 \\ 2 & 9 & 3 & p \end{pmatrix}$ mátrixok rangját a tanult módszerrel. Hogyan találjuk meg ezeknek a mátrixoknak egy lehető legnagyobb méretű reguláris részmátrixát?
3. Tfh az $AA^\top$ és az $A^\top A$ mátrixok mindegyike reguláris. Bizonyítsuk be, hogy $A$ is reguláris.
4. Tfh $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $|A| \neq 0$. Bizonyítsuk be, hogy vannak olyan $C$ és $D$ mátrixok, amikre $CA = B = AD$ teljesül. Igazoljuk azt is, hogy a fenti $C$ és $D$ mátrixok egyértelműek.
5. Tegyük fel, hogy a $10 \times 9$ méretű $A$ mátrix első 7 oszlopa is és az első 6 sora is lin.ftn rendszert alkot. Bizonyítsuk be, hogy kiválasztható $A$-nak egy sora és 7 oszlopa úgy, hogy az első 6 sor, a kiválasztott sor, valamint a 7 kiválasztott oszlop által meghatározott részmátrix determinánsa 0-tól különböző legyen.
6. Legyen $A \in \mathbb{R}^{33\times 44}$ mátrix, amire $|AA^\top| = 42$. Határozzuk meg az $|A^\top A|$ determináns értékét!
7. Bizonyítsuk be, hogy ha egy mátrix egy elemét megváltoztatjuk, akkor a mátrix rangja legfeljebb 1-gyel változik.
8. Tfh $A \in \mathbb{R}^{100\times 100}$ és $r(A) = 24$. Bizonyítsuk be, hogy megváltoztatható $A$-nak 18 eleme úgy, hogy a kapott mátrix rangja 42 legyen.
9. Igaz-e, hogy minden pozitív rangú mátrixnak van olyan eleme, ami megváltoztatható úgy, hogy csökkenjen a rang? Igaz-e, hogy minden olyan mátrixnak, aminek a rangja kisebb a sorai és az oszlopai számánál is, van olyan eleme, amit ha megváltoztatunk, akkor növekszik a rang?