A Számítástudomány alapjai

2. ZH javítókulcs (2022. 11. 03.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Oldjuk meg az itt látható egyenletrendszert. Legfeljebb mennyi lehet egy megoldásban az x_2 ismeretlen értéke, ha $x_4 \leq 13$?

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 &= 11 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 5 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 12x_4 &= -8 \end{aligned}$$

Kibővített együtthatómátrixot készítünk, és azon végzünk ESÁ-okat mindaddig, míg RLA mátrixot nem kapunk: (2 pont)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & -3 & 11 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & 2 & 12 & -8 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & -4 & 0 & 12 & -12 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ (4 pont)

Ezek szerint a megoldás $x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ tetszőleges és $x_1 = 1 - 2x_3 - 3x_4$ ill. $x_2 = 3 + 3x_4$. (2 pont)
Ezért $x_4 \leq 13$ esetén x_2 az $x_4 = 13$ választással lesz a lehető legnagyobb, konkrétan $x_2 = 3+3\cdot 13 = 42$. (2 pont)

2. Tegyük fel, hogy $\underline{0} \neq \underline{u} \in \langle \underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_k \rangle \cap \langle \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_\ell \rangle$. Bizonyítsuk be, hogy az $\{\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_k, \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_\ell\}$ vektorok nem lineárisan függetlenek.

Mivel $\underline{u} \in \langle \underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_k \rangle$ és $\underline{u} \neq \underline{0}$, ezért $\underline{u}$ előáll a $\underline{u}_i$ vektorok nemtriviális lin.komb-jaként: $\underline{u} = \lambda_1 \underline{u}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{u}_k$, (3 pont)
és hasonlóan $\underline{u} \in \langle \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_\ell \rangle$ miatt $\underline{u}$ a $\underline{v}_i$ vektoroknak is lin.komb-ja: $\underline{u} = \mu_1 \underline{v}_1 + \ldots + \mu_\ell \underline{v}_\ell$, (1 pont)
Ezért aztán $\lambda_1 \underline{u}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{u}_k = \underline{u} = \mu_1 \underline{v}_1 + \ldots + \mu_\ell \underline{v}_\ell$ miatt $\lambda_1 \underline{u}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{u}_k - \mu_1 \underline{v}_1 - \ldots - \mu_\ell \underline{v}_\ell = \underline{0}$ teljesül. (4 pont)
Azt kaptuk tehát, hogy $\underline{0}$ előáll az $\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_k, \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_\ell$ vektorok nemtriviális lineáris kombinációjaként, (1 pont)
vagyis a kérdezett vektorrendszer nem lehet lin.ftn. (1 pont)

3. Bázist alkotnak-e $\mathbb{R}^3$-ban a $\underline{v}_1 = (-1, 2, 7)^\top$, $\underline{v}_2 = (1, -3, -6)^\top$ és $\underline{v}_3 = (5, 42, 3)^\top$ vektorok?

Mivel $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, ezért egy $\mathbb{R}^3$-beli vektorrendszer pontosan akkor alkot bázist, ha három olyan vektort tartalmaz, amelyek lin.ftn rendszert alkotnak. (3 pont)
Ezért a kérdezett három vektor lin.ftn-ségét kell eldöntenünk. (1 pont)
A tanultak szerint a belőlük képzett mátrixot ESÁ-okkal RLA-ra hozzuk: (1 pont)

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 42 \\ 7 & -6 & 3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 2 & -3 & 42 \\ 7 & -6 & 3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & 52 \\ 0 & 1 & 38 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & -52 \\ 0 & 0 & 90 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & -57 \\ 0 & 1 & -52 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ (3 pont)

A RLA mátrix oszlopai lin.ftn-ek, ezért a kiindulási mátrix oszlopai is lin.ftn-ek. (1 pont)
$\mathbb{R}^3$-ban három lin.ftn vektor bázist alkot, ezért a kérdezett vektorok bázist alkotnak $\mathbb{R}^3$-ban. (1 pont)

Elég LA mátrixot képezni, ha az indoklásból kiderül, hogy a három oszlop lin.ftn.

4. Tegyük fel, hogy az $A \in \mathbb{R}^{42\times 42}$ mátrixnak minden olyan eleme 42, ami közvetlenül a főátló alatt vagy felett áll, A minden más eleme 0. Határozzuk meg az $|A|$ determináns értékét!

Megkeressük a nemnulla kifejtési tagokat. (1 pont)
Az első sorban és az első oszlopaban egyetlen nemnulla áll, ezekre a helyekre muszáj bástyát tennünk.

(2 pont)

Ezzel az első két sorból és oszlopból választottunk bástyát. (2 pont)

A harmadik sorban és oszlopban így már csak egy-egy helyre tehetjük nemnulla pozícióra a bástyát, és ez a két bástya a harmadik és negyedik sorokat és oszlopokat foglalja le. (2 pont)

Hasonlóan folytatva az adódik, hogy egyetlen nemnulla kifejtési tag tartozik a determinánshoz, amit 21 bástyapár határoz meg. (1 pont)

Az így elhelyezett bástyák közül kizárólag az egyszerre elhelyezett párok állnak inverzióban vagyis az inverziószám 21, így a kifejtési tag előjele negatív. (1 pont)

Mivel A minden nemnulla eleme 42, ezért az egyetlen nemnulla kifejtési tag -42^{42}, és ennyi a determináns értéke is. (1 pont)

5. Tetszőlges $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$ vektorra legyen $f(\underline{u}) = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_1 \end{pmatrix}$ valamint $F(\underline{u}) := 42f(\underline{u}) - f(f(\underline{u}))$. Lineáris leképezés-e az $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ függvény? Ha igen, akkor adjuk meg a leképezés $[F]$ mátrixát!

Könnyen látható, hogy $f(\lambda\underline{u}) = \lambda f(\underline{u})$, mert mindkét vektor a $\lambda\underline{u}$ vektor koordinátáinak ciklikus permutációja. Hasonlóan $f(\underline{u}+\underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$, mert mindkét vektor az $\underline{u}+\underline{v}$ vektor koordinátáinak ciklikus permutációja. (2 pont)

Ezért aztán $F(\lambda\underline{u}) = 42f(\lambda\underline{u}) - f(f(\lambda\underline{u})) = 42\lambda f(\underline{u}) - f(\lambda f(\underline{u})) = \lambda\cdot 42f(\underline{u}) - \lambda f(f(\underline{u})) = \lambda(42f(\underline{u}) - f(f(\underline{u})) = \lambda F(\underline{u})$ (1 pont)

Hasonlóan $F(\underline{u}+\underline{v}) = 42f(\underline{u}+\underline{v}) - f(f(\underline{u}+\underline{v})) = 42(f(\underline{u}) + f(\underline{v})) - f(f(\underline{u}) + f(\underline{v})) = 42f(\underline{u}) + 42f(\underline{v}) - f(f(\underline{u})) - f(f(\underline{v})) = 42f(\underline{u}) - f(f(\underline{u})) + 42f(\underline{v}) - f(f(\underline{v})) = F(\underline{u}) + F(\underline{v})$, (1 pont)

Tehát F lineáris leképezés. (1 pont)

A tanultak szerint $[F] = (F(\underline{e}_1), F(\underline{e}_2), F(\underline{e}_3), F(\underline{e}_4))$. (1 pont)

F definíciója szerint $F(\underline{e}_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 42 \end{pmatrix}$, $F(\underline{e}_2) = \begin{pmatrix} 42 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $F(\underline{e}_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 42 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $F(\underline{e}_4) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 42 \\ 0 \end{pmatrix}$, (3 pont)

tehát $[F] = \begin{pmatrix} 0 & 42 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 42 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 42 \\ 42 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. (1 pont)

★ Legyen $f(p) := \begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 4 \\ p & 1 & 42 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & -6 \end{vmatrix}$. Számítsuk ki az $f(42) - f(41)$ értéket.

Az első oszlop szerinti kifejtésből $f(p) = 2\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 42 & 3 \\ 2 & -3 & -6 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 1 & 42 & 3 \\ 2 & -3 & -6 \end{vmatrix} + p\begin{vmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -6 \end{vmatrix}$ adódik. (3 pont)

Ezért $f(42) - f(41) = 2\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 42 & 3 \\ 2 & -3 & -6 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 1 & 42 & 3 \\ 2 & -3 & -6 \end{vmatrix} + 42\begin{vmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -6 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 42 & 3 \\ 2 & -3 & -6 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 1 & 42 & 3 \\ 2 & -3 & -6 \end{vmatrix} - 41\begin{vmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -6 \end{vmatrix}$ teljesül. (3 pont)

Az ESÁ-ról tanultak szerint $\begin{vmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -8 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -8 \\ 0 & 4 & 28 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -8 \\ 0 & 1 & -10 \\ 0 & 4 & 28 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -8 \\ 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 68 \end{vmatrix}$ (2 pont)

Felső háromszögmátrix determinánsa a főátlóban álló elemei szorzata, (1 pont)

ezért a keresett kifejezés értéke $f(42) - f(41) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -8 \\ 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 68 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot 68 = 68$. (1 pont)