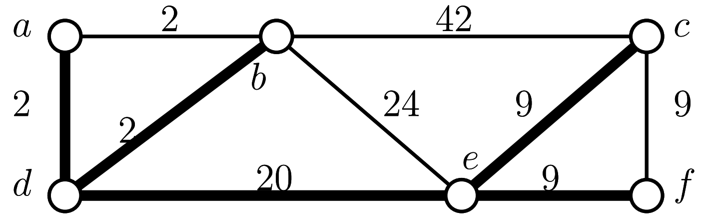
A Számítástudomány alapjai

1. pZH javítókulcs (2022. 11. 21.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

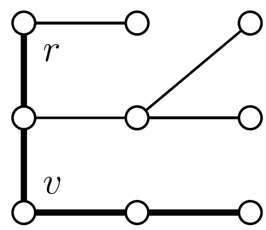
1. Legfeljebb mennyivel növelhető a minimális költségű feszítőfa költsége, ha a bal oldali ábrán látható G gráf egyetlen élét törölhetjük, és ugyanolyan költséggel két csúcs között behúzhatunk egy új élt, ami akár G egy élével párhuzamos is lehet?

   A Kruskal algoritmust lefuttatva, az élköltségek növekvő sorrendjében döntve az egyes élek feszítőfába történő beválasztásáról az ábrán látható 42 költségű F mkffát kapjuk. (4 pont)
   Ha G-nek olyan élét töröljük, ami nincs benne ebben a feszítőfában, akkor F továbbra is feszítőfa marad, tehát a költség így nem növekedhet. (2 pont)
   Ha valamelyik 2 vagy 9 költségű élt töröljük, akkor bárhová is húzzuk be az új élt, továbbra is marad G-nek egy 42 költségű feszítőfája. (2 pont)
   Ha azonban a 20 költségű élt töröljük, akkor az így kapott gráf mkffájának költsége 46 lesz, ugyanis a 20 költségű él helyett a 24 költségü kerül a feszítőfába. Ez akkor is így lesz, ha behúzunk egy 24 költségű élt valamelyik olcsó éllel párhuzamosan. (1 pont)
   A feladat kérdésére tehát 4 a válasz. (1 pont)



2. Legfeljebb mennyi lehet a v csúcs fokszáma az irányítatlan, egyszerű G gráfban, ha a jobb oldali ábrán G egy r-gyökerű DFS-fája látható?

   Az órán azt tanították, hogy irányítatlan DFS után nincs keresztél, azaz minden él két olyan csúcs között fut, amelyeknek a fában ugyanazon a gyökérből induló úton vannak. (5 pont)
   A konkrét gráfnak a gyökérből v-be vezető útját egyetlenegyféleképp lehet v-n túl egy levélig meghosszabbítani, ezért v minden szomszédjának ezen az úton kell lennie. (2 pont)



   Összesen 4 v-től különböző csúcs van ezen az úton, ezért v fokszáma is legfeljebb 4 lehet. (2 pont)
   A válasz helyességéhez azt is ellenőrizni kell, hogy a v csúcs 4-os fokszáma elérhető. Ez pedig abból látszik hogy ha a fához hozzáadjuk a két további v-ből induló élt, akkor a DFS lefuthat úgy, hogy először ezen út mentén éri el az út (v-vel együtt) 5 csúcsát, majd a többi csúcsot. (1 pont)

3. Legfeljebb hány éle lehet az egyszerű, irányított G gráfnak, ha G-nek a, b, c, d, e és d, b, c, a, e is topologikus sorrendje?

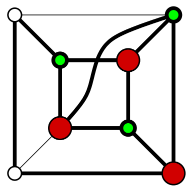
   A topologikus sorrend definíciója miatt G minden éle olyan, hogy a topologikus sorrendben korábbi csúcsból egy, a sorrendben későbbi csúcsba fut. (3 pont)
   Ezért az a csúcsból csakis az e csúcsba, b-ből csakis a c és e csúcsokba, c-ből kizárólag e-be, d-ből csak e-be, e-ből pedig semmilyen más csúcsba nem futhat él. (5 pont)
   Ezek szerint G-nek legfeljebb 5 éle lehet. (1 pont)
   Mivel a fent említett 5 él olyan DAG-ot alkot, aminek topologikus sorrendje mindkét megadott sorrend, ezért az előbb felső becslésként igazolt 5 él elérhető, és feladat kérdésére 5 a helyes válasz. (1 pont)

4. A G gráfnak 3 piros, 3 fehér és 5 zöld csúcsa van. Minden piros csúcs össze van kötve minden fehér csúccsal és minden zöld csúcs össze van kötve minden más zöld csúccsal, más él nincs G-ben. Van-e G-nek Hamilton-köre? Ha nincs, akkor legkevesebb hány élt kell behúzni G-be ahhoz, hogy a kapott gráfnak legyen Hamilton-köre?

   A G gráfnak két komponense van: az egyiket a piros és fehér, a másikat a zöld csúcsok alkotják. (2 pont)
   Mivel Hamilton-körrel rendelkező gráfok összefüggők, ezért G-nek nincs Hamilton-köre, és legalább 1 élt be kell húzni a két komponens közé ahhoz, hogy a kapott gráfnak legyen. (1 pont)
   Ám ha csak egy élt húzunk be a két komponens közé, a behúzott él egyik végpontját elhagyva két komponensre esik szét a gráf, (2 pont)
   vagyis továbbra sem teljesül a Hamilton-kör létezésének szükséges feltétele. (1 pont)
   Könnyen látható, hogy ha egy piros és egy zöld, illetve egy fehér és egy másik zöld csúcs közé húzunk be egy-egy élt, akkor e két él behúzásának hatására a kapott gráf egyszerű marad, és lesz Hamilton-köre is. (3 pont)
   Ezért a feladat kérdésére a válasz az, hogy legkevesebb két él behúzására van szükség. (1 pont)

5. Tekintsünk egy kockát és annak egy testátlóját. Legyenek a G gráf csúcsai a kocka csúcsai, és két csúcs között akkor fusson él G-ben, ha e csúcsok a kocka egy élének vagy a kijelölt tetstátlójának a végpontjai. Síkbarajzolható-e az így definiált G gráf?

   A tanultak szerint ha mutatunk G-nek egy topologikus $K_{3,3}$ részgráfját, akkor G nem síkbarajzolható. (E helyett hivatkozhatunk a Kuratowski-tételre is.) (3 pont)
   A mellékelt ábra a kérdéses gráfot mutatja. (1 pont)
   A megvastagított élek és a megjelölt csúcsok G egy topologikus $K_{3,3}$ részgráfját ábrázolják. G tehát nem síkbarajzolható. (6 pont)



☆ Lehet-e néhány lépésben egy 42 komponensből álló, 77 csúcsú, 66 élű egyszerű gráfból körmentes, egyszerű gráfot képezni, ha minden lépésben egy élt törlünk és két élt húzunk be? (Korábban törölt él is behúzható.)

   Ha sikerül körmentes gráfot kapni, akkor az eredeti G gráf éleiből megmaradó élek egy legalább 42 komponensből álló erdőt alkotnak. (2 pont)
   Ennek az erdőnek $77 - k$ éle van, ahol $k \geq 42$ a komponensek száma. (2 pont)
   Ezek szerint az erdő élszáma legfeljebb $77 - 42 = 35$, így az eredeti G gráfból legalább $66 - 35 = 31$ élt kell törölni. (2 pont)
   Pusztán ezen törlésekhez legalább 31 lépésre van szükség. (1 pont)
   Minden lépésben 1-gyel nő az élszám, tehát 31 lépés után a gráfnak legalább $66 + 31 = 97$ éle lesz. (1 pont)
   Azt tanították, hogy egy körmentes 77 csúcsú egyszerű gráfnak legyfeljebb 76 éle lehet, így a feladat kérdésére nemleges a válasz. (2 pont)