A Számítástudomány alapjai

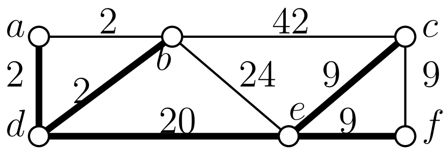
1. ZH javítókulcs (2022. 11. 03.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Lehet-e néhány lépésben egy 42 összefüggő komponensből álló, 88 csúcsú, 111 élű gráfból összefüggő gráfot képezni, ha minden lépésben két élt törölünk és egy élt húzunk be? (Korábban törölt él is behúzható.)

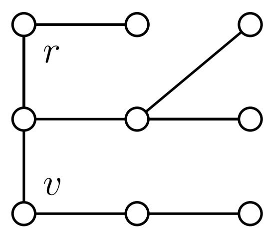
   Az ÉHL szerint egy él behúzása legfeljebb 1-gyel csökkenti a komponensek számát. (2 pont)
   Az összefüggőség eléréséhez az kell, hogy a komponensek száma 42-ről 1-re csökkenjen, tehát legalább 41 lépést kell végezni. (2 pont)
   Ez azonban $2 \cdot 41 = 82$ él törlésével jár. Így az élek száma $111 + 41 - 2 \cdot 41 = 70$-re csökken, és ha még több lépést végzünk, még tovább csökken az élek száma. (2 pont)
   Az órán olyat is tanítottak, hogy minden n csúcsú öf gráfnak van feszítőfája, és a ffa önmagában már $n - 1$ élt tartalmaz. (2 pont)
   Ezért ahhoz, hogy öf gráfot kapjunk a lépéssorozat végén, legalább 87 élre van szükség. (1 pont)
   A fentiek szerint legfeljebb 70 él maradhat, így a feladat kérdésére nemleges a válasz. (1 pont)

2. Legfeljebb mennyivel csökken a minimális költségű feszítőfa költsége, ha a bal oldali ábrán látható gráf egyetlen élét törölhetjük, és ugyanilyen költséggel két tetszőleges csúcs között felvehetünk egy új élt? (Az élek irányításától tekintsünk el.)

   Az órán tanult Kruskal-algoritmus segítségével elkészítünk egy mkffát az élek bevételéről növekvő költség szerint egyenként döntve. Az ábra egy ilyen F fát mutat. Az F ffa a költsége 42. (6 pont)
   Ha G-ből töröljük az F-ben nem szereplő 2 költségű élt, és behúzunk egy új, 2 költségű de élt, akkor a Kruskal-algoritmus outputja annyiban változik, hogy a korábbi de él helyett a most behúzott fog szerepelni. (2 pont)
   Az így kapott feszítőfa költsége 24. (1 pont)
   Ennél olcsóbb feszítőfát nem kaphatunk, bárhogy is alakítjuk a gráfot a feladatban leírt módon. Legfeljebb 3 db 2 költségű él szerepelhet a fában, a maradék két él költsége pedig darabonként legalább 9, ezért nem képzelhető el 24-nél olcsóbb ffa. Ezért a feladat kérdésére a válasz $42 - 24 = 18$. (1 pont)

3. Legfeljebb mennyi lehet a v csúcs fokszáma az irányítatlan G gráfban, ha a jobb oldali ábrán a G egy r-gyökerű BFS-fája látható?

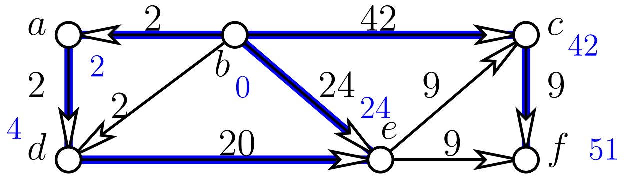
   

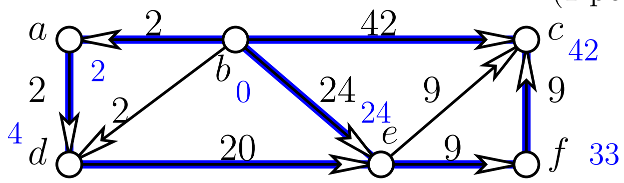
   Az órán azt tanították, hogy irányítatlan BFS után nincs szintet ugró él, azaz minden él két olyan csúcs között fut, amelyeknek a fában a gyökértől mért távolsága legfeljebb 1-gyel tér el. (5 pont)
   A v csúcs távolsága az r gyökértől 2, ezért v-ből kizárólag az r-től a fában $1, 2$ vagy 3 távolságra fekvő csúcsokba vezethet él. (1 pont)
   Az r gyökértől 2 csúcs van 1, 2 csúcs (köztük v) 2 és 3 csúcs pedig 3 távolságra. (1 pont)
   Ezért v-ből legfeljebb 6 másik csúcsba futhat él, azaz v fokszáma legfeljebb 6 lehet. (2 pont)
   A válasz helyességéhez azt is ellenőrizni kell, hogy a v csúcs 6-os fokszáma elérhető. Könnyen látható, hogy ha $E(G)$ pontosan az faélekből és a v-ből induló, szintet át nem ugró élekből áll, akkor a BFS lefuthat úgy, hogy a megadott fát találja meg. Ehhez az szükséges, hogy v apja legyen r után a másodiknak elért csúcs, és v testvérét v-nél hamarabb érjük el. (1 pont)

Sajnos a feladatban nem lett kikötve, hogy G egyszerű. Aki rámutat arra, hogy tetszőlegesen sok párhuzamos él behúzható a jobb oldali ábrába **úgy, hogy ettől a BFS-fa nem változik** annak jár a teljes pontszám.

4. Határozzuk meg a bal oldali ábrán látható PERT probléma minimális végrehajtási idejét! DAG-ot kapunk-e akkor, ha a cf él irányítását megfordítjuk? Ha igen, akkor mennyi lesz az így kapott PERT probléma minimális végrehajtási ideje?

A G csúcsainak topologikus sorrendjét megkaphatjuk az órán megismert forrástörléses módszerrel. Így adódik a b, a, d, e, c, f sorrend. (3 pont)
Ebben a sorrendben meghatározva az egyes csúcsokhoz tartozó legkorábbi kezdési időpontokat, az ábrán az egyes csúcsok mellett látható értékeket kapjuk. A teljes projekthez szükséges minimális végrehajtási idő tehát 51. (4 pont)
A cf él megfordításával kapott gráfnak is lesz topologikus sorrendje (konkrétan b, a, d, e, f, c), tehát DAG-ot kapunk. (1 pont)
Mivel csak a topologikus sorrend végén van eltérés, csak az f és a c legkorábbi kezdési időpontját kell újraszámolni. Ekkor f kezdési időpontja 33 lesz, c-é pedig 42 marad. (1 pont)
A módosított PERT probléma minimális végrehajtási ideje tehát 42, ez tehát a feladat végső kérdésére is a válasz. (1 pont)





5. A G gráfnak 3 piros, 3 fehér és 5 zöld csúcsa van. Minden piros csúcs össze van kötve minden fehér csúccsal, minden zöld csúcs össze van kötve minden más zöld csúccsal, és más él nincs G-ben. Legkevesebb hány élt kell behúzni G-be az egyszerűség megtartásával ahhoz, hogy az így kapott gráfnak legyen Euler-körsétája?

Az órán azt tanították, hogy az az Euler-körséta szükséges és elégséges feltétele, hogy a gráf izolált pontoktól eltekintve összefüggő legyen, és minden csúcs fokszáma páros legyen. (3 pont)
A G gráfnak két élt tartalmazó komponense van: az egyiket a piros és fehér, a másikat a zöld csúcsok alkotják. (1 pont)
G-ben a piros és fehér csúcsok mindegyikének 3, a zöld csúcsoknak pedig 4 a fokszáma. (2 pont)
Egy él behúzása két csúcs fokszámát változtatja meg, ezért 3 él behúzására mindenképp szükség van. (1 pont)
Ez viszont azt jelentené, hogy zöld csúcsból nem húzunk be élt, így G nem lesz összefüggő. Ezért 3 él behúzása biztosan nem elég, legalább 4-re van szükség. (1 pont)
4 éllel viszont megoldható a feladat: összekötünk egymással két piros ill. két fehér pontot, és a maradék piros ill. fehér pontot egy közös zöld szomszéddal kötjük össze. Az így kapott gráf összefüggő, és minden fokszáma páros, van tehát Euler-körsétája. A feladat kérdésére tehát 4 a válasz. (2 pont)

$\boxed{\star}$ Legkevesebb hány élt kell behúzni a bal oldalon látható gráf irányítatlan változatába ahhoz, hogy a kapott gráf ne legyen síkbarajzolható?

Egy él behúzása után G még biztosan összfüggő marad, hiszen a behúzott élt tudom a megadott lerajzoláshoz tartozó külső lapon vezetni. Ezért legalább 2 élt kell behúzni ahhoz, hogy G ne legyen síkbarajzolható. (5 pont)
Ha behúzzuk az af és cd éleket, akkor a bd és ec élek törlése után épp egy $K_{3,3}$ gráfot kapunk. Ezek szerint 2 él behúzása elegendő a síkbarajzolhatóság megszüntetésére, a feladat kérdésére 2 a válasz. (5 pont)

Ha valaki megfigyeli, hogy az a csúcs törlése után elég 3 élt behúzni, hogy K_5-öt kapjunk, és hivatkozik arra, hogy a K_5 nem SRható, akkor ezért 3 pont jár.