

A számítástudomány alapjai 2022. I. félév

6. gyakorlat. Összeállította: Fleiner Tamás (fleiner@cs.bme.hu)

Tudnivalók

Def: A G gráf *síkbarajzolható* (SRható), ha létezik G -nek olyan diagramja, amiben az éleknek megfelelő görbék (töröttvonalak) csak végpontokban metszhetik egymást. Az ilyen tulajdonságú diagramot *síkbarajzolt* (SRt) gráfnak hívjuk. A síkbarajzolt gráf a síkot *tartományokra* (lapokra) osztja. Lesz egy végtelen tartomány, az ún. *külső* tartomány. Gömbre rajzoláson lényegében ugyan-
ezt értjük, csak sík helyett a gömb felszínén dolgozunk, külső tartomány nincs.

Tétel: (G SRható) \iff (G gömbre rajzolható) **Köv.:** Tetsz. konvex poliéder élhálójá SRható.

Hasznos összefüggés (duális KFL): Ha egy G SRt gráfnak e éle van, és az egyes tartományait l_1, l_2, \dots, l_t él határolja, akkor $2e = \sum_{i=1}^t l_i$. (Multiplicitással számolunk: Ha egy uv él mindkét oldalán ugyanaz a t_i tartomány fekszik, akkor uv -t kétszer számoljuk l_i -be.)

Tétel: Ha G SRt, n csúcsa, e éle, k komponense és t tartománya van, akkor $n + t = e + k + 1$.

Köv.: (1) Ha G SRható, akkor bármely síkbarajzolásának ugyanannyi tartománya van.

(2) (**Euler-féle poliéderformula**) Ha G öf SRt gráf, akkor $n + t = e + 2$.

(3) Ha G egyszerű, legalább 3-pontú, SRt gráf, akkor $e \leq 3n - 6$.

(4) Ha G -nek háromszöglapja sincs, akkor még $e \leq 2n - 4$ is igaz.

(5) Ha G SRható és egyszerű, akkor van legfeljebb 5-ödfokú csúcsa, azaz $\delta(G) \leq 5$.

(6) Sem K_5 , sem $K_{3,3}$ nem SRható. ($K_{3,3}$ a „három ház, három kút” gráf.)

Def: *Élfelosztás* alatt azt értjük, hogy egy él törölünk, és bevezetünk egy másodfokú új csúcsot, aminek két szomszédja a törölt él két végpontja. A *topologikus* G olyan gráf, ami G -ből élfelosztások egymásutánjával kapható. Él összehúzása az él két végpontjának összeolvasztását jelenti.

Állítás: Csúcs és él törlése, él felosztása és él összehúzása megőrzi SRható tulajdonságot.

Köv.: SRható gráf részgráfja SRható. SRható gráfnak nincs se top. K_5 , se top. $K_{3,3}$ részgráfja.

Kuratowski-tétel: (G SRható) \iff (G nem tartalmaz se top. $K_{3,3}$, se top. K_5 részgráfot)

Fáry-Wagner-tétel: Ha G egyszerű és SRható gráf, akkor létezik G -nek olyan síkbarajzolt diagramja, amiben minden él egyenes szakasz.

Def: Legyen $G = (V, E)$ síkbarajzolt gráf, *duálisa* az a $G^* = (V^*, E^*)$ gráf, amelyre V^* a G lapjainak halmaza ill. $E^* = \{e^* : e \in E\}$ és e^* az e -t határoló tartomány(ok)nak megfelelő duális csúcsokat összekötő él.

Def: A $Q \subseteq E(G)$ élhalmaz *vágás*, ha Q egy olyan élhalmaz, hogy egyrészt Q elhagyásakor G szétesik (azaz komponenseinek száma megnő), másrészt Q egy legszűkebb élhalmaz ezzel a tulajdonsággal, azaz Q semelyik valódi részhalmozának elhagyásától sem esik G szét. Az e él *elvágó él*, ha $\{e\}$ vágás. A G gráf e és e' élei *soros élek*, ha $\{e, e'\}$ vágás.

Tétel: Legyen $G = (V, E)$ sr, G^* pedig a G duálisa n^*, e^*, t^*, k^* paraméterekkel. Ekkor

(1) G^* sr, $n^* = t, k^* = 1$, azaz G^* öf.

(2) Ha $v \in V(G^*)$ a G i -dik lapjához tartozik, akkor $d^*(v) = \ell_i$.

(3) $C \subseteq E(G)$ kör G -ben $\iff C^*$ vágás G^* -ban. (4) $Q \subseteq E(G)$ vágás G -ben $\iff Q^*$ kör G^* -ban.

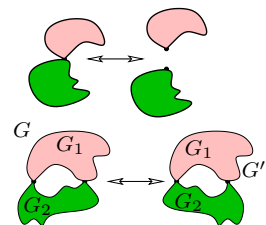
(5) $e \in E(G)$ a G hurokéle (elvágó éle) $\iff f(e)$ a G^* elvágó éle (hurokéle).

(6) $e, e' \in E(G)$ párhuzamos (soros) élek $\iff f(e), f(e')$ soros (párhuzamos) élek.

A (3,4) tulajdonságok neve *kör-vágás dualitás*.

Whitney egyik tétele: Legyen G^* a G SRt gráf duálisa. A H öf gráf pontosan akkor duálisa G egy alkalmas síkbarajzolásának, ha H megkapható G^* -ből az ábrán látható Whitney-operációk véges sokszori alkalmazásával.

Whitney másik tétele: Ha a G és H öf gráfok között létesíthető kör-vágás dualitás, akkor G és H SRható gráfok és alkalmas síkbarajzolásaik egymás duálisai.

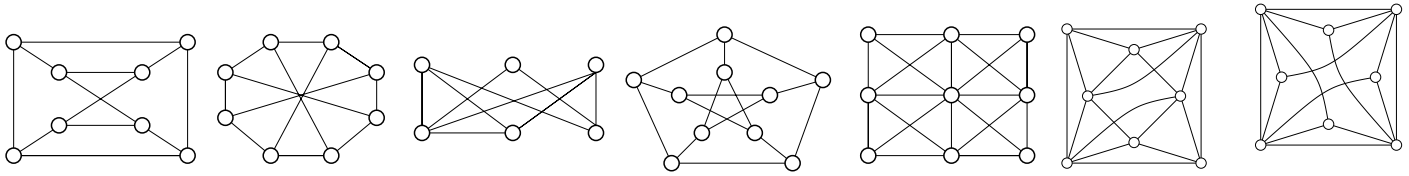


Gyakorlatok

1. Hány csúcsa van egy olyan öf síkbarajzolható gráfnak, aminek három háromszöglapja, három négyszöglapja és egy ötszöglapja van? (✓)
2. Egy 20-csúcsú poliédernek 12 lapja van, mind K oldalú sokszög. Mennyi a K értéke? (✓)
3. Legyenek $v_2, v_3, \dots, v_7, v_8$ a G gráf csúcsai, és pontosan akkor legyen v_i és v_j között él, ha $i^2 - 1$ -nek és $j^2 - 1$ -nek van 1-nél nagyobb közös osztója. Rajzoljuk le G egy áttekinthető diagramját, valamint döntsük el, hogy G síkbarajzolható-e. (✓)

(ppZH '12)

4. Egy konvex poliéder minden lapja négyszög vagy nyolcszög és minden pontban pontosan három lap találkozik. Mennyi a négyszög- és nyolcszöglapok számának különbsége?
5. Síkbarajzolhatók-e a K_6 , $K_{4,2}$, $K_{4,3}$, $K_5 - e$, $K_{3,3} - e$ gráfok? Hát az alábbiak?



6. Van-e olyan 9-pontú G gráf, hogy sem G sem a G komplementere nem síkbarajzolható? (V '01)
7. Van-e olyan 8-pontú G gráf, hogy mind G , mind pedig a \overline{G} komplementergráf síkbarajzolható?
8. Igazoljuk, hogy ha egy egyszerű G gráfnak legalább 11 csúcsa van, akkor G és \overline{G} közül legalább az egyik nem síkbarajzolható.
9. Tegyük fel, hogy G olyan összefüggő, síkbarajzolt gráf, amelynek 14 tartománya van, minden csúcsának fokszáma 3 vagy 6, és a harmadfokú csúcsok száma kétszerese a hatodfokúakénak. Hány csúcsa és hány éle van G -nek?
10. Bizonyítsuk be, hogy ha egy egyszerű G gráf síkbarajzolható, akkor a pontjainak legfeljebb a fele lehet 10-nél nagyobb fokú. (pZH '14)
11. Abszurdisztán adóhivatala egy papírfecnin szerzett értesülés nyomán szeretne felderíteni bizonyos ÁFA-csalásokat. A szövevényes bűnügy felgöngyölítéséhez elkészítettek egy G gráfot. G pontjai a gyanús cégek, és két csúcs között akkor fut él, ha a két szóban forgó cég egyike számlát állított ki a másiknak. Az adatok gondos analízise nyomán az derült ki, hogy minden gyanús cégnek legalább hat másik gyanús céggel volt már közös számlázási ügye. A nyomozás sikerének pedig az a kulcsa, hogy ez a G gráf átlátható legyen, azaz, hogy G -t úgy lehessen lerajzolni egy dátummal, pecséttel és aláírással ellátott okmányra, hogy élek belső pontban ne keresszék egymást. (Ha ugyanis eredménytelen marad a próbálkozás, akkor sajnos képtelenség felderíteni az csalásokat.) Sikerül-e vajon nyakon csípni az elvetemült bűnözőket? (ZH '14)
12. Egy mezőn k ház és k kút áll (ahol $k \in \mathbb{N}$). Minden háztól pontosan 4 (különböző) kúthoz vezet út (még hozzá közvetlenül, vagyis más házak vagy kutak érintése nélkül). Mutassuk meg, hogy biztosan van két olyan út, amelyek keresztezik egymást!
13. Bizonyítsuk be, hogy nem létezik 5 olyan ország, amik páronként szomszédosak!
14. A $K_{5,5}$ gráfot úgy rajzoltuk le a síkra, hogy az élek töröttvonalak, és egy ponton legfeljebb két él metszi egymást. Bizonyítsuk be, hogy ekkor legalább 9 élmetszéspont keletkezik. Mutassuk meg, hogy K_{10} lerajzolásakor legalább 42 élmetszéspontot kapunk. (!*)
15. Legfeljebb hány éle és hány tartománya lehet egy olyan egyszerű, n pontú, SRt G gráfnak, aminek van olyan lapja, ami G minden csúcsát tartalmazza a határán?
16. Ha G $n \geq 3$ pontú, egyszerű, síkbarajzolható gráf, akkor
 - (a) G egyúttal tóruszra is rajzolható;
 - (b) ha G -nek $3n - 6$ -nál kevesebb éle van, akkor behúzható G -be új él úgy, hogy továbbra is egyszerű, síkbarajzolható gráfot kapjunk;
 - (c) G -nek van legfeljebb harmadfokú csúcsa vagy G tetszőleges síkbarajzolásának van háromszöglapja. (ZH '01)
17. Mutassuk meg, hogy a K_5 , K_6 , K_7 és a $K_{3,3}$ gráfok mindegyike tóruszra (úszógumira) rajzolható. Bizonyítsuk be, hogy ha a G gráf síkbarajzolható, és G -be behúzzunk egy e élt, akkor a kapott $G + e$ gráf tóruszra rajzolható.
18. Igazoljuk, hogy ha G olyan összefüggő, síkbarajzolt gráf, amelyben minden fokszám páros, akkor G tartományai kiszínezhetők sakktáblaszerűen két színnel úgy, hogy az élekben szomszédos tartományok színe egymástól különböző legyen. (!)
19. Tfh G öf, SRható, és G minden lapja háromszög, ill., hogy G^* minden lapja négyszög. Hány pontja és hány éle van G -nek?
20. Igazoljuk, hogy ha G n pontú SRt gráf, és G izomorf G^* -gal, akkor G -nek $2n - 2$ éle van! Tetszőleges $n > 3$ -ra mutassunk példát ilyen G -re!
21. Adott $n > 2$ egész szám esetén van-e olyan SRható G gráf, ami izomorf a duálisával és részgráfként tartalmaz egy C_n kört?