A számítástudomány alapjai 2022. I. félév

3. gyakorlat Összeállította: Fleiner Tamás (fleiner@cs.bme.hu)

Tudnivalók

Def: A $G = (V, E)$ irányított gráf egy *bejárásán* a V-beli csúcsok alábbiak szerinti végiglátogatását értjük. Minden v csúcs állapota kezdetben *eléretlen*, majd idővel v *elértté* válik, a bejárás végére pedig *befejezett* lesz. A bejárás egy általános lépése az alábbi.

$\boxed{1.}$ Ha van *elért* csúcs, választunk egyet, mondjuk u-t. **(1a)** Ha van olyan uv él, amire v eléretlen, akkor v *elértté* válik (az uv él mentén). **(1b)** Ha nincs ilyen uv él, akkor u *befejezetté* válik.

$\boxed{2.}$ Nincs *elért* csúcs. **(2a)** Ha van *eléretlen* u csúcs, akkor u-t *elértté* tesszük.
(2b) Ha nincs *eléretlen* csúcs se (azaz minden csúcs *befejezett*), akkor a bejárás véget ér.

A bejárás során kialakul a csúcsok egy *elérési* ill. egy *befejezési sorrendje*, továbbá minden csúcshoz feljegyezzük azt is, hogy melyik él mentén értük el (ha van ilyen él). Ez utóbbi élek (az ún. *faélek*) alkotják a *bejárás fáját* (ami egyrészt irányított, másrészt pedig erdő). A G gráf további uv éle *előreél*, ha u a bejárás fájában a v őse, *visszaél*, ha u a v leszármazottja, egyébként pedig *keresztél*. (Irányítatlan gráf bejárásakor minden élt oda-vissza irányított élnek tekintünk.)

Köv.: Irányítatlan gráf bejárása után az előreélek megegyeznek a visszaélekkel.

Def: A *szélességi bejárás* (BFS) inputja a $G = (V, E)$ gráf és egy r gyökércsúcs. A szélességi bejárás során az r csúcsot már a legelején elértnek tekintjük, valamint az $\boxed{1.}$ esetben mindig a lehető legkorábban elért u csúcsot választjuk. A *szélességi fa* (avagy *BFS fa*) a szélességi bejárás fája.

Megfigyelés: (1) Szélességi bejárás során az elérési sorrend megegyezik a befejezési sorrenddel. (2) Gráfél nem ugorhat át faélt: $v_1, v_2, \ldots, v_n$ BFS elérési sorrend és $i < j < k \leq \ell$ mellett nem lehet v_iv_ℓ gráfél ha v_jv_k faél. **Köv.:** Szélességi bejárás után nincs előreél.

Def: Tetsz. G gráf az u és v csúcsainak $dist^G(u, v)$ *távolsága* a legrövidebb G-beli uv-út élszáma.

Megfigyelés: A BFS bejárás fája az r csúcsból minden más csúcsba a G gráf egy legrövidebb (legkevesebb élből álló) útját tartalmazza, azaz tetszőleges v csúcs G-beli távolsága r-től megegyezik az r gyökerű F szélességi fán mért távolsággal: $dist^G(r, v) = dist^F F(r, v)$.

Def: Adott $G = (V, E)$ (ir) gráf és egy $\ell : E \to \mathbb{R}$ élhosszfv. Egy G-beli (ir) út hossza az út éleinek összhossza, $dist_\ell(u, v)$ pedig az (ir) uv-utak közül a legrövidebb hosszát jelöli. Az ℓ hosszfv *konzervatív*, ha nincs G-ben negatív összhosszúságú (ir) kör.

Def: Adott $G = (V, E)$ (ir) gráf, $r \in V$ és egy $\ell : E \to \mathbb{R}$ élhosszfv. Az $f : V \to \mathbb{R}$ függvényt *(r, ℓ)-felső becslés*nek nevezzük, ha $f(r) = 0$ és $f(v) \geq dist_\ell(r, v)$ teljesül G minden v csúcsára. Az *$e = uv$ él menti javítás* esetén az $f(v)$ értéket a $\min\{f(v), f(u) + \ell(uv)\}$ értékkel helyettesítjük.

Megfigyelés: (1) Ha ℓ konzervatív, akkor tetsz. (r, ℓ)-f.b. élmenti javítása (r, ℓ)-f.b.-t ad.
(2) Ha az f (r, ℓ)-felső becsléshez nincs éredemi élmenti javítás, akkor $f(v) = dist_\ell(r, v)$ $\forall v \in V$.

Dijkstra algoritmusa Input: $G = (V, E)$ (ir) gráf, $\ell : E \to \mathbb{R}_+$ nemneg hosszfv, $r \in V$ gyökér. Output: $dist_\ell(r, v)$ minden $v \in V$-re. Működés: Kezdetben $U_0 := \emptyset$, $f(r) = 0$ és $f(v) = \infty$ ha $v \neq r$. Az algoritmus i-dik fázisában ($i = 1, 2, \ldots, |V|$) a következő történik.
1. Legyen u_i az a v csúcs a $V \setminus U_{i-1}$ halmazból, amelyre $f(v)$ minimális és legyen $U_i := U_{i-1} \cup \{u_i\}$.
2. Végezzünk élmenti javításokat minden U_i-ből kivezető u_ix élen.
Az output a $|V|$-dik fázis utáni f függvény. Szokás megjelölni a végső $f(v)$ értékeket beállító éleket.

Megfigyelés: Ha az output az f (r, ℓ)-felső becslés, akkor (1) $f(u_i) \leq f(u_{i+1})$ $\forall 1 \leq i < n$-re (2) $f(u_1) \leq f(u_2) \leq \ldots \leq f(u_n)$, valamint (3) Élmenti javítás nem változtat f-n.

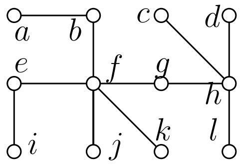
Köv.: (1) A Dijkstra-algoritmus helyesen működik, azaz $dist_\ell(r, v) = f(v)$ $\forall v \in V$ teljesül.
(2) Az algoritmus során megjelölt élek egy legrövidebb utak fáját alkotják G-ben: az r gyökérből minden r-ből elérhető csúcshoz vezet olyan legrövidebb út is, ami csak megjelölt éleket tartalmaz.
(3) A Dijkstra-algoritmus lépésszáma legfeljebb $konst \cdot (n^2 + m)$, ahol $n = |V|$ és $m = |E|$.

Gyakorlatok

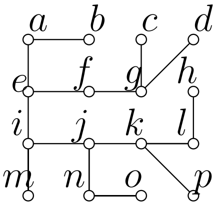
1. Törpfalván kitört a járvány: csúf kórság fertőzött meg néhány törpöt. Szerencsére a betegségből minden törp egy nap alatt meggyógyul, és ezután egy napig immunissá válik, ám sajnos ezt követően újra fertőződhet. Kellemetlen, hogy a törpök még betegen sem adják fel azt a megrögzött szokásukat, hogy minden egyes nap minden barátjukat meglátogatják. Márpedig ha beteg és nem immunis törp találkozik, az utóbbi bizonyosan megfertőződik. Mutassuk meg, hogy ha Törpfalván 100 törp él, akkor a járványnak a kitörését követő 101-dik napon már

bizonyosan vége van. Legfeljebb hány napig tarthat a járvány akkor, ha a törpök időközben újabb ismeretséget is köthetnek?

2. Rajzoljunk egy összefüggő G irányítatlan gráfot, válasszuk ki egy v csúcsát gyökérnek majd határozzuk meg, hogy legfeljebb hány keresztél keltkezhet a G gráf egy v gyökérből indított BFS bejárása után. (ZH '17 alapján) (✓)
3. Gyakoroljuk a BFS algoritmust irányított gráfon olyan r gyökércsúcsból indulva, ahonnan nem érhető el G minden csúcsa irányított úton. (✓)

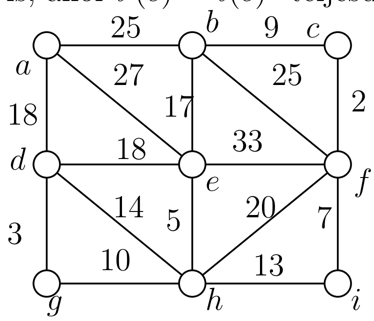


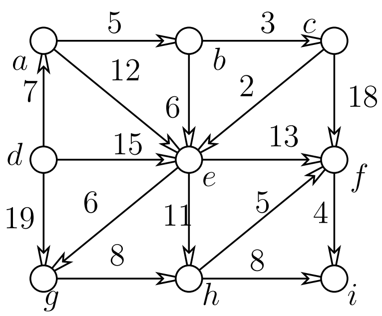
4. A felső ábrán látható valamely G gráf egy szélességi fája. Honnan indulhatott a bejárás, ha tudjuk, hogy b és c szomszédosak G-ben? (pZH'14)
5. Az alsó ábrán látható az egyszerű, irányítatlan G gráf i gyökérből indított szélességi bejárása után kapott F feszítőfa. Tudjuk, hogy az e csúcs G-beli fokszáma 7. Határozzuk meg a G gráf e-ből induló éleit. (pZH'15)

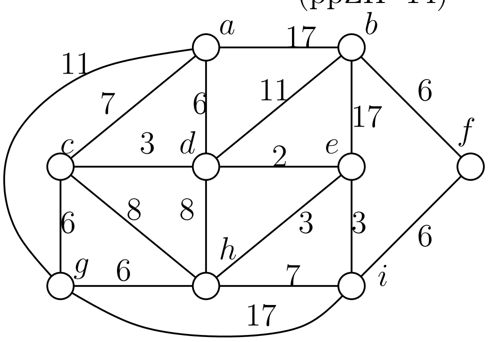


6. Adjunk hatékony algoritmust, aminek a bemenete egy n csúcsú összefüggő irányítatlan gráf, a kimenet pedig egy olyan gráfcsúcs, amiből minden más csúcs lefeljebb $n/2$ élű úton elérhető.
7. Tegyük fel, hogy a G irányítatlan gráf tetszőleges szélességi kereséssel kapott feszítőfája csillag. Mit lehet mondani G-ről?
8. Rajzoljunk gráfot, és keressük meg egy csúcsból kiindulva a BFS fáját. Megfelelő élhosszok megadásával gyakoroljuk Dijkstra algoritmusát. Bátran használjuk a túloldali gráfokat. (✓)
9. Legyen $G = (V, E)$ (irányított) gráf, $\ell : E \to \mathbb{R}_+$ nemnegatív élhosszfüggvény és legyenek u, v, w a G csúcsai. Igazak-e az alábbi állítások? (1) Ha P a G egy legrövidebb uv útja és w csúcsa P-nek, akkor a P út u-tól w-ig tartó ill. w-től v-ig tartó részei a G egy legrövidebb uw- ill. wv-útját alkotják. (2) Ha P_1 és P_2 a G egy legrövidebb uw- ill. wv-útja, akkor a P_1 és P_2 egymás után fűzése a G egy legrövidebb uv-útja lesz. (✓) És ha ℓ konzervatív?
10. Hogyan lehet a BFS algoritmust felhasználni adott r gyökér esetén az összes $dist_l(r, v)$ távolság meghatrározására, ha az minden $l(e)$ élhossz egész szám?

    Tervezzünk csavaranyákból és cukorspárgából gravitációs elven működő mechanikus számítógépet, ami alkalmas az inputként megadott, nemnegatív élhosszokkal rendelkező irányítatlan gráf tetszőleges gyökérpontjából a többi csúcs távolságának a meghatározására. (!)
11. Legyen $V(G) = \{v_3, v_4, \ldots, v_{10}\}$, és $v_iv_j \in E(G)$, ha i és j nem relatív prímek, azaz van 1-nél nagyobb közös osztójuk. Legyen a v_iv_j él hossza $\min(i, j) - 1$. Határozzunk meg a v_5 csúcsból minden más csúcsba egy-egy legrövidebb utat, ha van. (pZH '14) (✓)
12. A bal oldali ábrán látható gráf éleire írt számok az adott él hosszát jelentik. Órán tanult módszer felhasználásával határozzunk meg minden e-től különböző v csúcsra egy legrövidebb ev utat. (ZH '16) (✓)
13. Legyen adott a $G = (V, E)$ gráf élein egy $\ell : E \to \mathbb{R}$ hosszfüggvény. Igaz-e, hogy ha P a G egy legrövidebb uv-útja az ℓ hosszfüggvényre, akkor P egyúttal legrövidebb út az ℓ' hosszfüggvényre is, ahol $\ell'(e) = \ell(e)^2$ teljesül G minden e élére? (ppZH '14)







14. Adott egy $G = (V, E)$ gráf, egy $\ell : E \to \mathbb{R}_+$ hosszfüggvény, valamint egy r gyökérpont. Egyetlen Dijkstra-algoritmus lefuttatása segítségével találjuk meg G mindazon e éleit, amelyekre igaz az, hogy önmagában attól, hogy e hosszát eggyel csökkentjük egyetlen csúcs r-től mért távolsága sem csökken.
15. Adott egy $G = (V, E)$ gráf, egy $\ell : E \to \mathbb{R}_+$ élhosszfüggvény valamint egy $e = uv \in E$ él. Javasoljunk gyors eljárást annak a maximális λ értéknek a meghatározására, amennyivel G két csúcsának a távolsága megnövekszik akkor, ha töröljük az e élt G-ből.