A számítástudomány alapjai 2022. I. félév

2. gyakorlat. Összeállította: Fleiner Tamás (`fleiner@cs.bme.hu`)

Tudnivalók

Def: A H fa a G *feszítőfája*, ha H a G feszítő részgráfja (azaz $V(H) = V(G)$). A H feszítő részgráf akkor *feszítő erdő*, ha H erdő és G minden komponensének tartalmazza egy feszítőfáját.

Állítás: Tetsz. G gráfnak pontosan akkor van feszítőfája, ha G összefüggő.

Def: Ha $G = (V, E)$ egy gráf és $k : E \to \mathbb{R}$ az éleken értelmezett költségfüggvény, akkor G tetszőleges E' élhalmazának $k(E')$ *költsége* a E'-beli élek összköltsége. Az $F \subseteq E$ élhalmaz *minimális költségű feszítőfa (mkffa)*, ha (V, F) a G feszítőfája, és nem drágább a G egyetlen feszítőfájánál sem, azaz $k(F) \le k(F')$ teljesül G minden (V, F') feszítőfájára. *min. ktg fesz. erdő* definíciója hasonló.

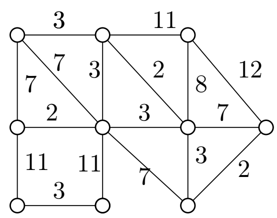
Kruskal (mohó) algoritmus: Input: $G = (V, E)$, $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfüggvény. Output: $F \subseteq E$
Működés: Legyen $F_0 = \emptyset$, és $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, ahol $k(e_1) \le k(e_2) \le \ldots \le k(e_m)$. Az output $F = F_m$, ahol $i = 1, 2, \ldots, m$-re $\quad F_i := \begin{cases} F_{i-1} \cup \{e_i\} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ körmentes} \\ F_{i-1} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ tartalmaz kört.} \end{cases}$

Tétel: Legyen $G = (V, E)$ egy gráf és $k : E \to \mathbb{R}$ egy tetsz. költségfüggvény, (V, F) pedig a G egy feszítőfája. F pontosan akkor mkffa, ha minden c-re teljesül, hogy F tartalmazza a G legfeljebb c költségű élei alkotta gráf egy feszítő erdejét.

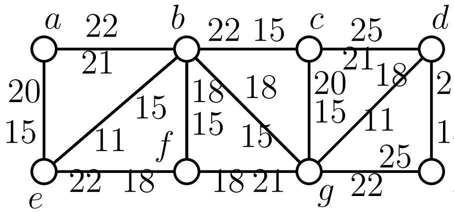
Megfigyelés: A Kruskal-algoritmus F outputjára igaz az előző tételbeli tulajdonság.

Tétel: A Kruskal-algoritmus által kiszámított F élhalmaz a G egy min költségű feszítő erdeje.

Gyakorlatok



1. Adott egy négyzet négy csúcsa a síkon. Hogyan lehet a lehető legrövidebb összhosszúságú vonalak meghúzásával elérni, hogy a meghúzott vonalakat követve a négy csúcs bármelyikéből el lehessen jutni a másik három csúcsba? (!)
2. Keressünk a fenti ábrán látható G gráfban mkffát! (✓) Hány minimális költségű feszítőfája G-nek?
3. Adott a $G = (V, E)$ gráf és a $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv, valamint G csúcsainak egy piros és zöld színnel színezése. Adjunk hatékony eljárást olyan minimális összköltségű F élhalmaz megkeresésére, amire minden piros csúcsból vezet F-beli út (a) legalább egy ill. (b) minden zöld csúcsba.
4. Adott a $G = (V, E)$ gráf és az élein egy $k : E \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvény. Tegyük fel, hogy ismerünk a $G - e$ gráfon egy minimális költségű F feszítőfát. Határozzuk meg a G gráfnak egy olyan minimális költségű feszítőfáját, aminek F-fel a lehető legtöbb közös éle van.
5. A jobb oldali ábrán látható $G = (V, E)$ gráf élei a felújítandó útszakaszokat jelentik. Minden élén két költség van: az olcsóbbik az egyszerű felújítás költsége, a drágább pedig ugyanez, kerékpárút építéssel. A cél az összes útszakasz felújítása úgy, hogy összefüggő kerékpárúthálózat épüljön ki, amin G minden pontja elérhető. Határozzunk meg egy legolcsóbb felújítási tervet, ami teljesíti ezt a feltételt. (ZH'15) (✓)



6. Abszurdisztán kormánya tendert ír ki n településnek a helyi vízműre történő rácsatlakoztatására. Minden ajánlat két helyszín (két település vagy egy település és a vízmű) között kiépítendő vezeték költségét tartalmazza. Tudjuk, hogy a kormány a lehető legolcsóbb módját választja annak, hogy az n település a vízműhöz csatlakozzon. Cégünk különféle homályos üzletek nyélbeütésével lényegében ingyen meg tudná építtetni a Rátót és Piripócs közti vezetéket. Ráadásul minisztériumi kapcsolatunk, Mutyi bácsi elárulta nekünk az összes beérkezett ajánlatot. Hogyan árazzuk a saját Rátót-Piripócs ajánlatunkat, hogy a lehető legnagyobbat szakítsuk?
7. Adott a $G = (V, E)$ gráf és az élein egy $k : E \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvény. Bizonyítsuk be, hogy G minden egyes minimális költségű F feszítőfája outputja lehet a Kruskal-algoritmusnak alkalmas (költség szerint monoton növekvő) élsorrend esetén. Bizonyítsuk be, hogy ha a $G = (V, E)$ gráf minden élének különböző a költsége, akkor G minimális költségű feszítőfája egyértelmű.
8. Adott $G = (V, E)$ gráf és $k : E \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvény mellett a G gráf minden éle ki van színezve a piros, fehér és zöld színek valamelyikére. Adjunk hatékony módszert, ami G olyan mkffáját (vagy feszítő erdejét) találja meg, ami a lehető legtöbb zöld, és a lehető legkevesebb piros élt tartalmazza.