A számítástudomány alapjai 2022. I. félév

11. gyakorlat. Összeállította: Fleiner Tamás (`fleiner@cs.bme.hu`)

Tudnivalók

Def: Azonos méretű mátrixok összeadása és mátrix skalárral szorzása a vektorokhoz hasonlóan koordinátánként történik.

Állítás: Ha $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times k}$ és $\lambda, \kappa \in \mathbb{R}$ akkor (1) $A+B = B+A$, (2) $(A+B)+C = A+(B+C)$, (3) $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$, (4) $(\lambda+\kappa)A = \lambda A + \kappa A$, (5) $\lambda(\kappa A) = (\lambda\kappa)A$, (6) $(A+B)^\top = A^\top + B^\top$, és (7) $\lambda \cdot A^\top = (\lambda A)^\top$.

Def: Az $\underline{u} = (u_1, \ldots, u_n)^\top$ és $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_n)^\top$ vektorok *skaláris szorzata* $\underline{u}\cdot\underline{v} = u_1v_1 + \ldots + u_nv_n$.

Állítás: $\forall \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$, $\forall\lambda$: (1) $\underline{u}\cdot\underline{v} = \underline{v}\cdot\underline{u}$, (2) $\underline{u}\cdot(\underline{v}+\underline{w}) = \underline{u}\cdot\underline{v} + \underline{u}\cdot\underline{w}$ ill. (3) $(\lambda\underline{u})\cdot\underline{v} = \lambda(\underline{u}\cdot\underline{v})$.

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ és $B \in \mathbb{R}^{k\times \ell}$ mátrixok szorzata az az $n\times\ell$ méretű mátrix, aminek (i,j) pozíciójában az A i-dik sorának és B j-dik oszlopának skaláris szorzata áll $\forall i, j$ esetén.

Mátrixszorzás tulajdonságai: (1) $\lambda\cdot AB = (\lambda A)B = A(\lambda\cdot B)$, (2) $A(B+C) = AB + AC$ ill. $(A+B)C = AC + BC$, (3) $A(BC) = (AB)C$, (4) $AB \neq BA$ általában, ill. (5) $(AB)^\top = B^\top A^\top$.

Determinánsok szorzástétele: $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n} \Rightarrow |AB| = |A||B|$.

Def: $I_n = (\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$ az $n\times n$ méretű *egységmátrix*, ahol $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$ az $\mathbb{R}^n$ tér standard bázisa.

Állítás: Tfh $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$, $\underline{e}_i, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{e}_j, \underline{u} \in \mathbb{R}^k$. Ekkor (1) $\underline{e}_i^\top A$ az A i-dik sora, (2) $A\underline{e}_j$ az A j-dik oszlopa, (3) $I_nA = A = AI_k$ (4) $\underline{v}^\top A$ az A sorainak lin.komb-ja ill. (5) $A\underline{u}$ az A oszlopainak lin.komb-ja.

Köv.: (1) Ha AB értelmes, akkor AB i-dik sora a B sorainak lin.komb-ja, A i-dik sora szerinti együtthatókkal. Az AB j-dik oszlopa pedig az A oszlopainak a B j-dik oszlopában szereplő együtthatókkal vett lin.komb-ja.
(2) C pontosan akkor áll elő AB alakban rögzített B-re, ha C minden sora B sorainak lin.komb-ja.
(3) C pontosan akkor áll elő AB alakban rögzített A-ra, ha C minden oszlopa A oszlopai lin.komb-ja.
(4) Ha A' az A mátrixból ESÁ-okkal áll elő, akkor $A' = BA$ alkalmas B-re.

Def: Tfh $U \le \mathbb{R}^k$ és $V \le \mathbb{R}^n$. Az $f: U \to V$ *lineáris leképezés*, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k$, és $\forall\lambda\in\mathbb{R}$ esetén (1) $f(\lambda\underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$ ill. (2) $f(\underline{u}+\underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$ teljesül.

Megfigyelés: Ha $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ akkor $\underline{v} \mapsto A\underline{v}$ egy $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ lin.lekép.

Állítás: (1) Minden f lin.lekép-hez van olyan $[f]$ mátrix, amire $f(\underline{v}) = [f]\underline{v}$ minden értelmes $\underline{v}$-re. (2) Ha $f: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ lin. lekép, akkor $[f] = (f(\underline{e}_1), \ldots, f(\underline{e}_k))$.

Lemma: Tfh $U \le \mathbb{R}^k, V \le \mathbb{R}^n$ és $f: U \to V$. Ekkor f lin.lekép $\iff$ f zárt a lin.komb-ra, azaz $f(\sum_{i=1}^{\ell}\lambda_i\underline{u}_i) = \sum_{i=1}^{\ell}\lambda_i f(\underline{u}_i)$ $\forall\lambda_i, \underline{u}_i$.

Lemma: Tfh $U \le \mathbb{R}^k, V \le \mathbb{R}^n$, $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_m$ az U bázisa és $\underline{v}_1, \ldots \underline{v}_m \in V$. Ekkor egyértelműen létezik olyan $f: U \to V$ lin.lekép, amire $f(\underline{b}_i) = v_i$ $\forall i$.
Magyarul: a báziselemeken felvett értékek egyértelműen meghatározzák a lin.lekép-t.

Gyakorlatok

1. Legyen $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ ill. $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Döntsük el, hogy elvégezhetők-e az alábbi műveletek, és ha igen a válasz, számítsuk is ki a végeredményt. $2A + 3B$, AB, BA, $AB + 2B$, $BB^\top$.

2. Tfh az $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ mátrix minden eleme nemnegatív. Tudjuk, hogy az $AA^\top$ bal felső eleme 0, a jobb alsó pedig 14, valamint az $A^\top A$ mátrix bal felső eleme 9, a jobb alsó pedig 4. Határozzuk meg az A mátrixot.

3. Döntsük el, igazak-e az alábbi összefüggések minden $n\times n$ méretű A, B mátrix esetén. Az igaz állításokat bizonyítsuk be, a hamisakra adjunk ellenpéldát. $AB + B = (A + I_n)B$, $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$, $(A + I_n)^2 = A^2 + 2A + I_n$.

4. Legyen A az az 10×10 méretű mátrix, aminek a főátlójában és az alatt csupa 0-k állnak, a főátló felett pedig minden elem 1-es. Határozzuk meg az A^{100} mátrixot!

5. Tfh az $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix i-dik és j-dik sorának felcserélése nyomán az A' mátrixot kapjuk. Igaz-e, hogy A' előállítható A-ból egyetlen mátrixszorzás segítségével? Ha igen, akkor ehhez

miféle mátrixszal kell A-t megszorozni? Válaszoljuk meg ugyanezeket a kérdéseket akkor is, ha A' az A egy sorának konstanssal történő végigszorzásával, vagy elhagyásával ill. A egy sorának A egy másik sorához történő hozzáadásával kapható. Mi a válasz ugyanezekre a kérdésekre, ha a sorok helyett az oszlopokra végezzük el a fenti változtatásokat?

6. Legyen $f : U \to V$ lin.lekép az U és V alterek között. Mutassuk meg, hogy a $\underline{0} \in V$ vektor biztosan előáll $f(\underline{u}) = \underline{0}$ alakban alkalmas $\underline{u} \in U$ vektor képeként. Bizonyítsuk be azt is, hogy a $\underline{0}$-ba képződő vektorok az U altér egy alterét alkotják: $\{\underline{u} \in U : f(\underline{u}) = \underline{0}\} \leq U$. Ennek az altérnek a neve az f leképezés *magtere*, jelölése $Ker(f)$. Igazoljuk, hogy az f leképezés képeként slőálló vektorok V egy alterét alkotják: $\{f(\underline{u}) : \underline{u} \in U\} \leq V$. Ez az altér az f *képtere*, jele $Im(f)$.

7. Legyen $G = (V, E)$ irányított gráf, $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. A G gráf segítségével az alábbi $f_G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ leképezést definiáljuk. Tetszőleges $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ oszlopvektor esetén az $f_G(\underline{x})$ kép i-dik koordinátája legyen $\sum\{x_j : v_j v_i \in E\}$, vagyis az $\underline{x}$ vektornak a v_i beszomszédaihoz tartozó koordinátái összege. Igazoljuk, hogy f_G lin.lekép, és fogalmazzuk meg, hogyan lehet megkapni f_G mátrixát a G ismeretében. Tudunk-e élsúlyozott gráfokból is lineáris leképezést konstruálni?

   Milyen gráf tartozik (1) az identikus leképezéshez (amikoris minden vektorhoz önmagát rendeljük), (2) 2 dimenzióban az x tengelyre tükrözéshez ill. az origó körüli 90 fokos elforgatáshoz, (3) 3 dimenzióban az xy-síkra tükrözéshez, ill az $x = y$ síkra tükrözéshez? Milyen leképezések tartoznak n dimenzióban az üresgráfhoz, az irányított körhöz, ill. az oda-vissza irányított élekkel rendelkező teljes gráfhoz?

8. Bizonyítsuk be, hogy ha az $f : U \to V$ lineáris leképezés csak a $\underline{0} \in U$ vektort képezi a $\underline{0} \in V$ vektorba, akkor f injektív, azaz $\underline{x} \neq \underline{y}$ esetén $f(\underline{x}) \neq f(\underline{y})$.

9. Határozzuk meg annak az $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezésnek a mátrixát, amire $f(\underline{v})$-t tetszőleges $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$ esetén úgy kapjuk, hogy $\underline{v}$-t az y tengely körüli 90 fokkal elforgatjuk, majd tükrözzük az $x = y$ síkra, végül merőlegesn vetítjük az xz síkra.

10. Tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezésre $f(2,1)^\top = (1,1,2)^\top$ ill. $f(3,2)^\top = (0,2,1)^\top$. Határozzuk meg a leképezés $[f]$ mátrixát!

11. Tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris leképezésre $f(1,2)^\top = (0,1)^\top$ ill. $f(3,4)^\top = (4,2)^\top$. Határozzuk meg az $f(4,2)^\top$ vektort!

12. Bizonyítsuk be, hogy van olyan $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrix, amire $A^{42} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Írjunk fel egy ilyen mátrixot.

13. Feleltessük meg az $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ vektornak a $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ legfeljebb n-edfokú polinomot. Lineáris leképezést definiál-e az $\mathbb{R}^{n+1}$-beli vektorokon a legfeljebb n-edfokú polinomok deriválása? Ha igen, akkor határozzuk meg a leképezéshez tartozó mátrixot.