A számítástudomány alapjai 2022. I. félév

10. gyakorlat. Összeállította: Fleiner Tamás (`fleiner@cs.bme.hu`)

Tudnivalók

Megfigyelés: A 2 és 3 dimenziós példa alapján az $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$ vektorok által feszített n dimenziós paralelotop előjeles térfogatának előjele a szerint pozitív ill. negatív, hogy feszítő vektorok sorrendje páros vagy páratlan sok páronkénti cserével kapható a fenti sorrendből.

Def: Az $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$ vektorok tetsz. sorrendjéhez egyértelműen meghatározhatók az *orbitok*: minden vektor pontosan egy orbithoz tartozik, és minden orbit azt írja le, hogy az orbiton belül milyen ciklikus sorrendben cserélnek helyet a vektorok az eredeti $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$ sorrendhez képest.

Megfigyelés: Ha egy sorrendben két vektort felcserélünk, akkor az így kapott sorbarendezéshez tartozó orbitok (ill. páros orbitok) száma pontosan 1-gyel tér el az eredeti sorrendhez tartozó (páros) orbitok számától.

Köv.: Egy sorrend pontosan akkor kapható páros számú párcsere egymásutánjaként, ha orbitjainak száma n-nel egyező paritású, vagy, ami ezzel ekvivalens, ha páros orbitjai száma páros.

Def: *n elem permutációja* alatt egy $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ kölcsönösen egyértelmű leképezést értünk. Ezek halmazát S_n jelöli. Az $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$ vektorok egy sorrendjéhez az a $\sigma \in S_n$ permutáció tartozik, amire $\sigma(i)$ az e_i sorszáma az adott sorrendben minden értelmes i-re.

Példa: Az $(\underline{e}_3, \underline{e}_8, \underline{e}_5, \underline{e}_7, \underline{e}_1, \underline{e}_6, \underline{e}_2, \underline{e}_4)$ sorrendhez tartozó σ permutáció:

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$\sigma(i)$	5	7	1	8	3	6	4	2

Def: A $\sigma \in S_n$ permutációban az (i, j) pár *inverzióban áll*, ha i és j nagyságviszonya a $\sigma(i)$ és $\sigma(j)$ nagyságviszonyával ellentétes. A σ permutáció $I(\sigma)$ *inverziószáma* a σ szerint inverzióban álló elempárok száma.

Példa: Az $(\underline{e}_3, \underline{e}_5, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_4)$ sorrendben $\underline{e}_5$ és $\underline{e}_2$ inverzióban áll, és megfelelő σ permutáció inverziószáma $I(\sigma) = 5$.

Állítás: Ha σ az $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$ vektorok egy sorrendjéhez tartozó permutáció, és két vektort felcserélve a σ' permutációt kapjuk, akkor $I(\sigma)$ és $I(\sigma')$ különbsége páratlan.

Def: Az $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$ vektorok egy sorrendjéhez tartozó *bástyaelhelyezés* a $n \times n$ mátrixnak azon pozícióit jelenti, ahol 1-esek állnak a fenti sorrendben felírt egységvektorok alkotta mátrixban.

Megfigyelés: A bástyaelhelyezéshez tartozó permutáció inverziószáma megegyezik az ÉK-DNy pozícióban álló bástyapárok számával.

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix *determinánsa* $|A| = \det A = \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{I(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$, ahol $a_{i,j}$ az A mátrix i-dik sorának j-dik eleme.

Megjegyzés: A determináns az összes lehetséges bástyaelhelyezéshez tartozó szorzat előjeles összege, ahol az előjel a szerint pozitív ill. negatív, hogy az ÉK-DNy pozícióban álló bástyapárok száma páros ill. páratlan.

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix determinánsa az az $A^\top \in \mathbb{R}^{k\times n}$ mátrix, aminek i-dik sorának j-dik eleme az A mátrix j-dik sorának i-dik eleme minden értelmes i, j esetén.

Lemma: $|A| = |A^\top|\ \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

Köv.: Ha egy sorokkal kapcsolatos tulajdonság pontosan akkor teljesül minden determinánsra, ha a tulajdonság oszlopokra vonatkozó értelemszerű megfelelője is teljesül minden determinánsra.

Lemma: Tfh $\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n, \underline{u}'_i \in \mathbb{R}^n$ és $\lambda \in \mathbb{R}$. Ekkor

(1) $|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i + \underline{u}'_i, \ldots \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}'_i, \ldots \underline{u}_n|$.

(2) $|\underline{u}_1, \ldots, \lambda\underline{u}_i, \ldots \underline{u}_n| = \lambda|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots \underline{u}_n|$ (3) Ha $\underline{u}_i = \underline{0}$, akkor $|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots \underline{u}_n| = 0$.

(4) Ha $i < j$, akkor $|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_j, \ldots, \underline{u}_n| = -|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_j, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n|$.

(5) Ha $\underline{u}_i = \underline{u}_j$, akkor $|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n| = 0$.

Lemma: ESÁ hatása tetsz. négyzetes A mátrixra:

(1) Sort λ-val szorozva a determináns is λ-val szorzódik.

(2) Sorcsere hatására a determináns ellentettjére változik.

(3) Egy sorhoz egy másik sort hozzáadva a determináns nem változik.

Def: Az A négyzetes mátrix *főátlója* az azonos sor- és oszlopindexű elemei halmaza. Az A mátrix *felső háromszögmátrix*, ha a főátlója **alatt** minden eleme 0.

Megfigyelés: (1) Ha az A négyzetes mátrix LA, akkor A felső háromszögmátrix.

(2) Ha A felső háromszögmátrix, akkor determinánsa a főátlóbeli elemei szorzata.

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix i-dik sorának j-dik eleméhez tartozó $A_{i,j}$ *előjeles aldetermináns* az i-dik sor és j-dik oszlop elhagyásával keletkező $(n-1)\times(n-1)$ méretű mátrix determinánsának $(-1)^{i+j}$-szerese.

Kifejtési tétel: Tfh $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $a_{i,j}$ jelöli A i-dik sorának j-dik elemét. Ekkor
(1) $|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}A_{i,j}$ $\forall 1 \le j \le n$ (oszlop szerinti kifejtés) ill.
(2) $|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}A_{i,j}$ $\forall 1 \le i \le n$ (sor szerinti kifejtés).

Gyakorlatok

1. Milyen n esetén létezik olyan $\sigma \in S_n$ permutáció, aminek az inverziószáma $I(\sigma) = 42$?

2. Határozzuk meg, hogy páros vagy páratlan annak a $\sigma \in S_n$ permutációnak az inverziószáma, amire $\sigma(i) = i+2$ ha $i < n-1$, $\sigma(n-1) = 1$ és $\sigma(n) = 2$.

3. Hányféle módszert ismerünk egy négyzetes mátrix konkrét bástyaelhelyezéshez tartozó kifejtési tag előjelének megállapítására?

4. Bizonyítsuk be, hogy ha az A négyzetes mátrix determinánsa $|A| \neq 0$, akkor A első oszlopának van olyan eleme, hogy bármely $z \in \mathbb{R}$ szám esetén ez az elem megváltoztatható úgy, hogy a kapott mátrix determinánsa z legyen. Van-e mindig ilyen elem akkor is, ha $|A| = 0$?

5. Legyen A az $n \times n$ méretű csupa1 mátrix. Legkevesebb hány elemét kell A-nak megváltoztatni ahhoz, hogy a kapott mátrix determinánsa nemnulla legyen?

6. Számítsuk ki az alábbi determinánsokat: $\begin{vmatrix} 3 & 6 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & p & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & 9 & 81 \\ 1 & 10 & 100 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 9 & 81 \end{vmatrix}$

7. Legyenek az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix oszlopai $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n$, és tfh $\underline{u}_n \in \langle \underline{u}_1, \dots, \underline{u}_{n-1} \rangle$. Bizonyítsuk be, hogy $|A| = 0$.

8. Legyenek $a_1, \dots, a_n$ pozitív számok, és legyen az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix i-dik sorának j-dik eleme $\frac{a_i}{a_j}$ ha $i+j$ páros, különben legyen 0. Számítsuk ki az $|A|$ determinánst.

9. Thf az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix i-dik sorának j-dik eleme $i+j-1$ minden értelmes i,j-re. Számítsuk ki az $|A|$ determinánst.

10. Tfh az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ négyzetes mátrix minden eleme ± 1. Bizonyítsuk be, hogy $|A|$ osztható 2^{n-1}-gyel.

11. Tfh az egész számokból álló négyzetes A mátrix bármelyik oszlopában is adjuk össze a sorban található számokat, mindig 42-t kapunk. Bizonyítsuk be, hogy ha A első sorát lecseréljük egy csupa 1-est tartalmazó sorra, akkor az így kapott A' mátrixra $|A| = 42|A'|$ teljesül.

12. Legyen az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix i-dik sorának j-dik eleme $a_{i,j}$. Számítsuk ki az $|A|$ determinást értékét, ha (1) $a_{i,j} = \min(i,j)$, (2) $a_{i,j} = i \cdot j$ ill. (3) $a_{i,j} = |i-j|$ teljesül minden értelmes i,j-re.

13. Mennyi lehet legfeljebb az $A \in \mathbb{R}^{77\times 77}$ mátrix determinánsa, ha A elemeinek abszolút értéke legfeljebb 2, és a páratlan sorszámú sorok és páratlan sorszámú oszlopok metszéspontjában mindenütt 0-nak kell állnia?(*)

14. Az A négyzetes mátrix *ferde kifejtése* alatt azt értjük, hogy A egy sorának minden elemét A egy másik sorának ugyanazon oszlopba eső eleméhez tartozó előjeles aldeterminánssal szorozzuk össze, és az ilyen szorzatokat összeadjuk. (Képlettel: $\sum_{j=1}^{n} a_{k,j}A_{i,j}$ rögzített $k \neq j$ sorindexekre.) Hogyan lehet $|A|$ segítségével meghatározni a ferde kifejtés során kapott összeget?