

A számítástudomány alapjai 2022. I. félév

1. gyakorlat. Összeállította: Fleiner Tamás (fleiner@cs.bme.hu)

Tudnivalók

Def: $G = (V, E)$ egyszerű gráf, ha (1) $V \neq \emptyset$ és (2) $E \subseteq \binom{V}{2} := \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$
 G gráf esetén $V(G)$ jelöli G csúcsai, $E(G)$ pedig G élei halmazát, azaz $G = (V(G), E(G))$. A $G = (V, E)$ gráf véges, ha V és E is véges halmazok.

Def: A G gráf egy *diagramja* egy olyan lerajzolása, melyben a csúcsoknak (síkbeli) pontok felelnek meg, éleknek pedig a két végpontot összekötő, önmagukat nem metsző görbék.

Def: Az $e = \{u, v\}$ élt $e = uv$ -vel jelöljük; u és v az e él végpontjai. Az u és v csúcsok szomszédosak, ha e a gráf éle. Az e, f élek párhuzamosak, ha végpontjaik azonosak. A hurokél olyan él, melynek végpontjai azonosak. Nem feltétlenül egyszerű gráfban lehet hurok- és párhuzamos él is.

Def: A G gráf v csúcsának $d(v)$ foka a v végpontú élek száma (hurokél kétszer számít):

$d(v) := |\{e \in E : v \text{ az } e \text{ végpontja}\}| + |\{e \in E : e \text{ hurokél } v\text{-n}\}|$

Állítás: (HSL) Ha G véges gráf, akkor fokszámösszege $2|E(G)|$.

K_n az n -pontú teljes gráf: bármely két pontja össze van kötve.

Def: P_n az n -pontú út, C_n az n -pontú kör (ld. az ábrán)

G reguláris, ha fokszámai megegyeznek. $\Delta(G)$ ill. $\delta(G)$ G max ill. min fokszáma.

Def: A G egyszerű gráf komplementere a $\overline{G} := (V(G), \binom{V}{2} \setminus E(G))$ gráf. (Két csúcs pontosan akkor szomszédos $\overline{G}$ -ben, ha nem szomszédos G -ben.) A G_1 és G_2 gráfok izomorfak ($G_1 \cong G_2$), ha G_1 és G_2 csúcsai is megszámozhatók 1-től n -ig úgy, hogy $\forall i, j$ -re pontosan annyi él fut i -ből j -be G_1 -ben, mint G_2 -ben. (Különböző csúcsok különböző számot kapnak, és minden számot felhasználunk.)

Def: A G gráf sétája olyan $(v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_k)$ sorozat, melyre $e_i = v_i v_{i+1} \in E(G)$ ($\forall i$) és $e_1, e_2, \dots, e_{k-1}$ páronként különbözők. Ez a séta körséta, ha $v_1 = v_k$.

Def: Az út (ill. kör) olyan (kör)séta, aminek csúcsai (a végpontok azonosságától eltekintve) különbözők. Egyszerű gráfban az út (kör) azonosítható a hozzá tartozó pont- vagy élsorozattal.

Állítás: A G gráfban pontosan akkor létezik u és v között séta, ha létezik u és v között út.

Def: A G gráf összefüggő (öf), ha bármely két pontja között vezet séta.

Def: $K \subseteq V(G)$ a G gráf komponense, ha bármely $u, v \in K$ között létezik G -séta, de nem létezik uv -séta ha $u \in K, v \in V(G) \setminus K$. **Köv.:** Minden gráf egyértelműen bontható komponensekre.

Élhozzáadási lemma: A $G + e$ gráfra az alábbiak közül pontosan egy igaz:

(1) e -n keresztül nincs kör, és $G + e$ -nek eggyel kevesebb komponense van, mint G -nek,

(2) e -n keresztül van kör, és $G + e$ -nek ugyanannyi komponense van, mint G -nek.

Def: Legyen $G = (V, E)$ gráf, $e \in E, v \in V$. Ekkor $G - e = (V, E \setminus \{e\})$ az éltörlés eredménye; a csúcsörléssel keletkező $G - v$ gráfhoz V -ből töröljük v -t, E -ből pedig a v -re illeszkedő éleket.

Def: A H gráf a G gráf feszített/feszítő/jelzőnélküli részgráfja, ha H megkapható G -ből csúcsörlésekkel/éltörlésekkel/csúcs- és éltörlésekkel.

Állítás: H a G -nek pontosan akkor (1) részgráfja (2) feszítő részgráfja (3) feszített részgráfja, ha

(1) $V(H) \subseteq V(G)$ és $E(H) \subseteq E(G)$, (2) $V(H) = V(G)$ és $E(H) \subseteq E(G)$ ill.

(3) $V(H) \subseteq V(G)$ és $E(H)$ az $E(G)$ azon éleiből áll, amelyek végpontjai $V(H)$ -beliek.

Def: A G véges, egyszerű gráf erdő, ha G körmentes. A G gráf akkor fa, ha G összefüggő erdő.

Állítás: Ha az n csúcsú G erdőnek k komponense van, akkor éleinek száma $|E(G)| = n - k$.

Köv.: Ha F fa, akkor $|E(F)| = |V(F)| - 1$. **Köv.:** Ha egy G véges gráfra az alábbiak közül 2 teljesül, akkor igaz rá a harmadik is: (1) G összefüggő, (2) G körmentes, (3) $|V(G)| = |E(G)| - 1$.

Def: A G gráf v csúcsa levél (ill. izolált pont), ha $d(v)=1$ (ill. ha $d(v)=0$).

Állítás: Tfh F fa. Ekkor (1) $(F - e)$ -nek pontosan két komponense van $\forall e \in E(F)$ -re. (2) F -nek pontosan egy uv -útja van $\forall u, v \in V(F)$ -re. (3) $(F + e)$ -nek pontosan egy köre van $\forall e \notin E(F)$ -re.

(4) Ha $|V(F)| \geq 2$, akkor F -nek legalább két levele van.

Def: F a G gráf feszítőfája (ffája), ha F egy G -ből éltörlésekkel kapható fa.

Állítás: (G -nek van feszítőfája) $\iff$ (G öf.)

Gyakorlatok

1. Helyezzünk két világos és két sötét huszárt egy 3×3 -as sakktábla négy sarkába úgy, hogy az azonos színű huszárok átellenes mezőkön álljanak. A huszárokkal a sakkban szokásos módon lépünk úgy, hogy sosem állhat egyszerre két figura ugyanazon a mezőn. Elérhető-e így, hogy a huszárok a tábla sarkaiban állnak, és az átellenes huszárok különböző színűek? (!)

2. Legyenek a G egyszerű gráf csúcsai az $1, 2, \dots, 10$ számok, és két különböző csúcs között akkor fusson él, ha a két szám különbsége páratlan. Hány 4 hosszú köre van a G gráfnak? (ZH '14)
3. A G gráfnak $n+3$ csúcsa van: ebből 3 piros (a, b, c) és n zöld ($v_1, v_2, \dots, v_n$). Két csúcs pontosan akkor szomszédos G -ben, ha a színük különbözik. Hány 6 pontú kör van a G gráfban? (ZH '16)
4. Tegyük fel, hogy a háromszöget nem tartalmazó, irányítatlan, 100 csúcsú G egyszerű gráf 4-reguláris, azaz minden fokszáma 4. Hány 3-élű útja van G -nek? (pZH '12)
5. Hány különböző egyszerű gráf adható meg az $\{1, 2, \dots, n\}$ csúcshalmazon? (✓)
6. Határozzuk meg, mik a 2-reguláris gráfok. Hogy néznek ki azon G gráfok, amelyekre $\Delta(G) \leq 2$?
7. Határozzuk meg az összes olyan véges, egyszerű G gráfot, aminek nincs két azonos fokú csúcsa.
8. Mutassuk meg, hogy ha G véges gráf, akkor páratlan fokú pontjainak száma páros. (✓)
Igazoljuk azt is, hogy ha G nem véges, akkor ez nem feltétlenül igaz.
9. Van-e olyan egyszerű gráf, aminek a fokszámai a.) $1, 2, 2, 3, 3, 3$ ill. b.) $1, 1, 2, 2, 3, 4$? (✓)
10. Igazoljuk, hogy ha $u \in V(G)$ foka páratlan, akkor van olyan uv -út, amire $d(v)$ páratlan. (pZH '15)
11. Bizonyítsuk be, hogy bármely 13 ember között van olyan, aki legalább 6 másikat ismer vagy van köztük 3 olyan, akik páronként nem ismerik egymást. (Az ismeretség kölcsönös.)
12. Igazoljuk, hogy ha egy 6 csúcsú G gráf fokszámai $2, 2, 2, 4, 5, 5$, akkor G nem egyszerű. (pZH '14)
13. Tegyük fel, hogy G egyszerű gráf és n csúcsa van. Mutassuk meg, hogy ha $d(v) \geq \frac{n}{2}$ teljesül G -nek minden csúcsára, akkor G összefüggő. (✓)
14. Tegyük fel, hogy a G egyszerű gráfnak 100 csúcsa van, melyek bármelyikének a fokszáma legalább 33, továbbá G -nek van olyan csúcsa, melyből legalább 66 él indul. Bizonyítsuk be, hogy G összefüggő. (ZH '15)
15. A G egyszerű gráfnak $2k$ pontja van, minden pontjának foka legalább $k-1$, és G -nek létezik egy legalább k -adfokú pontja. Bizonyítsuk be, hogy G összefüggő.
16. Legyenek e, f és g a G egyszerű, összefüggő gráf különböző élei. Tegyük fel, hogy a G gráf összefüggő marad, bármely élet is hagyjuk el, ám a $G-e-f$ és a $G-e-g$ gráfok egyike sem összefüggő. Igazoljuk, hogy ekkor a $G-f-g$ gráf sem összefüggő.
17. Mutassuk meg, hogy bármely 11 csúcsú és 45 élű gráfnak van legalább 9-edfokú csúcsa. (✓)
18. Találjuk meg (izomorfia erejéig) mindazon egyszerű gráfokat, melyekre
a) $n=5, m=2$ b) $n=5, m=3$ c) $n=5, m=7$ d) $n=4, m=5$ e) $n=5, m=8$
ahol n ill. m jelöli a gráf csúcsainak ill. éleinek számát. (✓)
19. Hogy néz ki az a lehető legkevesebb csúcsot tartalmazó egyszerű gráf, amiben a legrövidebb kör hossza pontosan 4 és minden pont harmadfokú?
20. Mutassunk a komplementerével izomorf, 5- ill. 6-pontú gráfot!
21. Igazoljuk, hogy tetsz. egyszerű gráf élei irányíthatók úgy, hogy ne keletkezzen irányított kör. (!)
22. Ketten a következő játékot játsszák. Adott n pont, kezdetben semelyik kettő nincs összekötve. A játékosok felváltva lépnek, minden lépésben a soron következő játékos az n pont közül két tetszőlegesen választott közé behúzza egy élet. Az veszít, aki kört hoz létre. A kezdő vagy a másodiknak lépő játékos nyer, ha mindketten a lehető legjobban játszanak? (V '00)
23. Igazoljuk, hogy minden fa megkapható egy csúcsból kiindulva úgy, hogy minden lépésben egy új levelet adunk az addig felépített gráfhoz. (!)
24. A G egyszerű gráfnak e egy olyan éle, aminek elhagyásával fát kapunk. Mutassuk meg, hogy G -nek még legalább két másik éle is rendelkezik ezzel a tulajdonsággal.
25. Ha T_1 és T_2 két fa ugyanazon a véges ponthalmazon, és e_1 a T_1 tetszőleges éle, akkor létezik T_2 -nek egy e_2 éle, hogy $T_1 - e_1 + e_2$ és $T_2 - e_2 + e_1$ is fa.
26. Tegyük fel, hogy az F fának csak első-, másod- és harmadfokú csúcsai vannak, utóbbiból pontosan tíz darab. Határozzuk meg F leveleinek (azaz elsőfokú csúcsainak) a számát. (pZH '16)
27. Egy fának 8 csúcsa van, fokszámai pedig kétfélék. Mi lehet ez a két szám?
28. Hány pontja van annak a T fának, melyre $|E(\overline{T})| = 15 \cdot |E(T)|$? (✓)
29. Hány feszítőfája van a K_1, K_2, K_3, K_4 ill. K_5 gráfoknak? Mi lehet ez a szám K_n esetén?
30. Egy $n \times n$ méretű T táblázatnak nincs két egyforma sora. Bizonyítsuk be, hogy T -nek van olyan oszlopa, aminek törlése után a kapott táblázatban továbbra sincs két egyforma sor. (*)
31. Mutassuk meg, hogy ha a T téglalapot sikerült olyan téglalapokkal kiparkettázni, amelyek mindegyikének van egész hosszúságú oldala, akkor T -nek is van egész hosszúságú oldala. (*)