A Számítástudomány alapjai

2. ZH javítókulcs (2021. 12. 03.)

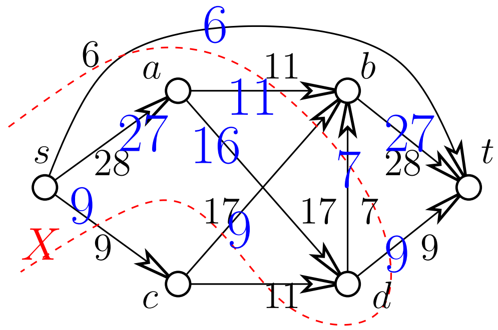
Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Határozzuk meg az ábrán látható G gráf kromatikus számát, és állapítsuk meg, hogy egyetlen további él behúzásával elérhető-e, hogy a kapott G' gráf kromatikus számára $\chi(G') = \chi(G) + 1$ teljesüljön. (Az élekre írt számoktól és az élek irányításától tekintsünk el.)

   Az a, b és d csúcsok egy K_3 részgráfot feszítenek, ezért $\chi(G) \geq \omega(G) \geq 3$. (3 pont)
   A G gráf kiszínezhető 3 színnel, hiszen az a, c, t csúcsokat 1-es, az s és b csúcsot 2-es, míg a d csúcsot 3-as színnel színezzük, akkor jó színezét kapunk. (2 pont)
   Ezért a G gráf kromatikus száma $\chi(G) = 3$. (1 pont)
   Ha azonban behúzzuk az ac élt, (1 pont)
   akkor a, b, c, d egy K_4 részgráfot feszít, így $\chi(G') \geq \omega(G') \geq 4$. (1 pont)
   Az így kapott G' ki is színezhető 4 színnel, és ehhez elég, ha a G fenti színezésében a c csúcsot 4-es színűre átszínezzük. (1 pont)
   Ezért a feladat második kérdésére igenlő a válasz: elérhető egyetlen él behúzásával, hogy a kromatikus szám 1-gyel nőjön. (1 pont)

   Természetesen nem csak az ac él behúzásával lehet indokolni a igenlő választ, hasonlóan igazolható ugyanez pl. a ct él segítségével is.

2. Keressünk az ábrán látható hálózatban maximális nagyságú st-folyamot. Változik-e a maximális folyamnagyság akkor, ha a cb él kapacitását $\sqrt{2}$-vel megnöveljük?



   A javító utas algoritmussal meghatároztuk az ábrán látható 42 nagyságú st-folyamot. Ehhez az $st(6)$, $sabt(11)$, $scdt(9)$, $sadbt(7)$ ill. $sadcbt(9)$ javításokat végeztük, a zárójelben az adott javítás során küldött folyammennyiség áll. (5 pont)
   A kapott folyamhoz tartozó segédgráfban s-ből az $X = \{s, a, d\}$ csúcsok érhetők el javító úton, és ez az X halmaz egy 42 kapacitású st-vágást indukál. Ezért a megtalált 42 nagyságú folyam csakugyan maximális. (3 pont)
   A cb él kapacitásának növelése hatására a $c(X)$ kapacitás nem növekszik, 42 marad. Ezért a maximális folyamnagyság sem nőhet ettől, így a feladat második kérdésére nemleges a válasz. (2 pont)

   A folyam maximalitásának igazolásához nem szükséges a folyamalgoritmusra hivatkozni: ha valaki (bárhogy) talál egy 42 nagyságú folyamot, és egy 42 kapacitású vágást, és erre megfelelően hivatkozik, akkor azért jár a pont. (Vagy éppenséggel akkor is, ha világosan kijelenti (és bizonyítja), hogy a 42 nagyságú folyamhoz tartozó segédgráfban már nincs st-út.) Ha azonban csak egy 42 nagyságú folyamra mutat rá a megoldó (amiről nem világos, hogyan keletkezett), és bizonyítékot nem ad a maximalitásra, akkor ez csak minimálisan visz közelebb a megoldáshoz.

3. Tegyük fel, hogy a 100 csúcsú $G = (A+B, E)$ páros gráf A és B színosztályára is teljesül a Hall-feltétel. Határozzuk meg a lefogó ponthalmaz minimális méretét, $\tau(G)$-t.

   A Hall tétel szerint ha egy G páros gráf A színosztályára teljesül a Hall-feltétel, akkor G-nek van az A színosztályt fedő párosítása. (2 pont)
   Ezek szerint a feladatbeli G gráfnak olyan párosítása is van, ami az A színosztályt fedi, és olyan is, ami a B színosztályt. (2 pont)
   Ha most az A színosztályt fedő párosítás nem fedné a B színosztályt, akkor $|A| < |B|$ teljesülne, de ekkor nem létezhetne G-ben olyan párosítás, ami a B színosztályt fedi. Ezért az A színosztályt fedő párosítás fedi a B színosztályt is, azaz G egy teljes párosításáról van szó. (2 pont)
   A G gráfnak van tehát teljes párosítása, ezért, mivel 100 csúcsa van, a független élei maximális száma $\nu(G) = \frac{|V(G)|}{2} = \frac{100}{2} = 50$. (2 pont)
   Kőnig tanult tétele miatt pedig $\tau(G) = \nu(G) = 50$ a feladat kérdésére a válasz. (2 pont)

4. Síkbarajzolható-e az ábrán látható G gráf? (Az élekre írt számoktól és az élek irányításától tekintsünk el.)

   Kuratowski tanult tétele szerint G pontosan akkor síkbarajzolható, ha nem tartlamazza részgráfként sem a K_5 sem pedig a $K_{3,3}$ gráf soros bővítését. Ha tehát mutatunk egy ilyen tiltott részgráfot, akkor abból azonnal adódik, hogy G nem síkbarajzolható. (3 pont)
   Ha a G gráfból töröljük a bd élt, akkor az így kapott részgráf épp a $K_{3,3}$ lesz: az s, b, d csúcsok alkotják az egyik, az a, c, t csúcsok pedig a másik színosztályt. E tiltott részgráf miatt pedig G nem síkbarajzolható. (7 pont)

5. Hány olyan x egész szám van, amire egyaránt teljesül, hogy $42x \equiv 24\ (100)$ és hogy $42 \leq x < 4242$?

   Mivel $(42, 100) = 2 \mid 24$, ezért az órán tanult tétel szerint a $42x \equiv 24\ (100)$ lineáris kongruencia megoldható, és a megoldások pontosan 2 db modulo 100-as maradékosztályt alkotnak. (6 pont)
   A $[42, 4242)$ intervallum pontosan 4200 egész számot tartalmaz, és minden modulo 100 maradékosztályból pontosan 42 szám esik bele. (3 pont)
   Ezért a két megoldás-maradékosztály mindegyike 42 keresett x-et tartalmaz. A feladat kérdésére a válasz tehát az, hogy $42 + 42 = 84$ ilyen egész szám van. (1 pont)

   Természetesen az is teljes értékű megoldás, ha valaki helyesen megoldja a kongruenciát (7 pontért) és a konkrét $x \equiv 22\ (50)$ megoldásból határozza meg a megadott intervallumba eső megoldások számát (3 pontért).

$\boxed{\star}$ Bizonyítsuk be, hogy bárhogyan is színezzük ki a K_{42} teljes gráf éleit 7 színnel, biztosan található benne a $K_{3,3}$-nak vagy a K_5-nek olyan soros bővítése, amelynek minden éle ugyanolyan színt kapott.

   A K_{42} gráf élszáma $\binom{42}{2} = \frac{42 \cdot 41}{2} = 21 \cdot 41$. (1 pont)
   Mivel az éleket 7-féle színnel színezzük, lesz olyan szín, amivel az élek legalább hetedrészét fogjuk megszínezni, azaz legalább $(21 \cdot 41)/7 = 3 \cdot 41 = 123$ él ugyanolyan színt fog kapni. (2 pont)
   Az órán azt tanították, hogy egy n-csúcsú, egyszerű, síkbarajzoható gráfnak $n \geq 3$ esetén legfeljebb $3n - 6$ éle lehet. (2 pont)
   Ez $n = 42$ esetén $3 \cdot 42 - 6 = 120$-as felső korlátot ad az élszámra. (1 pont)
   Tekintettel arra, hogy bizonyosan lesz 123 egyszínű él, és egy síkbarajzolható, 42-csúcsú gráfnak legfeljebb 120 éle lehet, ezért a 7 szín valamelyikére színezett élek nem síkbarajzolható, csupa egyszínű élt tartalmazó részgráfot alkotnak. (1 pont)
   Kuratowski tanult tétele szerint pedig e részgráf bizonyosan tartalmazza részgráfként a K_5 vagy a $K_{3,3}$ soros bővítését. Ezzel pedig igazoltuk a feladat állítását. (3 pont)