A Számítástudomány alapjai

1. ZH javítókulcs (2021. 11. 05.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. 456 piréz óvodás piros lámpa, zöld lámpa játékkal dönti el, hogy ki vehet részt az 50 évente rendezett kanászati világkiállítás bejáratánál felállított óriásmozaik elkészítésében, ami a csodatévő ártányt ábrázolja, csillogó mangalicapikkelyekből kirakva. Az nyer, aki a játék ideje alatt nem esik ki és áthalad a célvonalon. Tudjuk, hogy 42 nyertes lett, a nyertesek különböző időpontokban haladtak át a célvonalon, és a 456-os számú játékos nyert, a 42-es számú viszont kiesett. Ezen feltételek mellett a nyertesek hányféle sorrendben léphették át a célvonalat?

   A 456-os óvodás melletti 41 nyertes versenyző nem lehet a sem a 42-es, sem a 456-os számú, de a többi 454 óvodás bármelyike lehet. (2 pont)
   Ennek megfelelően a nyertesek halmaza $\binom{454}{41}$-féle lehet. (3 pont)
   A 42 nyertes versenyző beérkezési sorrendeje a 42!-féle lehetséges sorrend bármelyike lehet, (3 pont)
   ezért a feladat kérdésére a válasz $\binom{454}{41} \cdot 42!$, (2 pont)
   ami felírható $42 \cdot 414 \cdot 415 \cdot \ldots \cdot 454$ alakban is. (0 pont)

   A feladat megfogalmazása sajnos nem volt egyértelmű. Jogos értelmezés az is, hogy a 42 nyertes rögzített (és persze rájuk teljesülnek a megadott feltételek), és a kérdés az, hogy hányféleképp lehet őket sorba rendezni. Erre persze a válasz a 42!, és ha ezt a hallgató helyesen indokolja, akkor jár érte a teljes pontszám.

2. Tegyük fel, hogy a 15-csúcsú, egyszerű G gráf élei úgy vannak piros, fehér és zöld színre színezve, hogy a piros élek egy feszítőfát, a fehérek pedig Hamilton-kört alkotnak. Mennyi a zöld élek száma, ha a $\overline{G}$ komplementernek épp 34 éle van?

   A piros élek a 15-csúcsú gráf feszítőfáját alkotják, ezért a piros élek száma 14. (2 pont)
   A fehér élek Hamilton-kört határoznak meg, ezért 15 él kapott fehér színt. (2 pont)
   A 15-csúcsú teljes gráfnak $\binom{15}{2} = 105$ éle van. (2 pont)
   Ebből 34 él a komplementerhez tartozik, és nem kapott színt. (2 pont)
   Ezek szerint a zöld élek száma $105 - 14 - 15 - 34 = 42$-nek adódik. (2 pont)

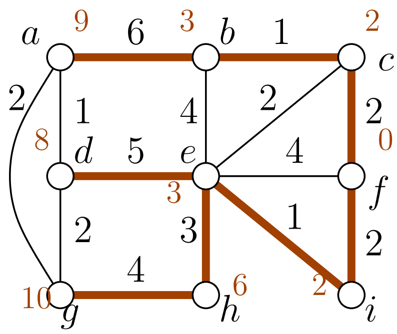
3. Van-e olyan b-ből indított DFS bejárása az ábrán látható G gráfnak, ami után az eb, ed és ef élek mindegyike faél lesz? (Az élekre írt számoktól tekintsünk el.)

   Igen, van ilyen mélységi bejárás. Például úgy kaphatunk ilyet, hogy az egyes csúcsok elérése és befejezése az alábbi sorrendben történik (a befejezést zárójellel jelezzük):
   $b, e, f, i, (i), c, (c), (f), d, a, g, h, (h), (g), (a), (d), (e), (b)$. (10 pont)

   Megadhatjuk a bejárást a feszítőfa segítségével is, de ekkor is meg kell mondani, hogy a fa egyes csúcsait (illetve ágait) milyen sorrendben éri el a DFS bejárás. Ez utóbbi hiányáért (egyébként helyes fa esetén) 4 pontot vonunk le.

   Ha valaki rossz választ ad, de az érveléséből kiderül, hogy világosan látja, hogy dolgozik a DFS, akkor 3 pontot kap.

4. Van-e az ábrán látható G gráfnak olyan feszítőfája, ami az f csúcsból minden más csúcsba tartalmazza a G egy legrövidebb útját? Ha igen, adjunk meg egy ilyen feszítőfát.
(Az élekre írt számok most az élek hosszait jelentik.)
Az órán azt tanították, hogy nemnegatív élhosszok esetén tetszőleges gyökérhez van legrövidebb utak fája, és ilyet a gyökérből indított Dijkstra algoritmussal lehet találni. Az első kérdésre tehát igenlő a válasz. (2 pont)



Ezért az f csúcsból futtatjuk a Dijkstra algoritmust a megadott élhosszokkal, és a keresett legrövidebb utak fáját azok az élek alkotják, amik az egyes csúcsok végső (f,ℓ)-felső becsléseit beállítják. (2 pont)
Az ábra a kapott legrövidebb utak fáját mutatja az egyes csúcsok f gyökértől mért távolságaival, a táblázat pedig az (f,ℓ)-felső becslések alakulását ill. a KÉSZ halmaz bővülését mutatja. (6 pont)
Az is hibátlan érvelés, ha nem részletezett módon megtalálunk egy feszítőfát (pl. az ábrán barnával jelzettet) és arra hivatkozunk, hogy a fán mért (barnával jelzett) távolságok egyrészt felső becslést adnak a legrövidebb utak hosszaira, másrészt pedig ezen az (f,ℓ)-felső becslésen egyetlen élmenti javítás sem tud változtatni.

a	b	c	d	e	f	g	h	i
∞	∞	∞	∞	∞	$\boxed{0}$	∞	∞	∞
∞	∞	$\boxed{2}$	∞	4	0	∞	∞	2
∞	3	2	∞	4	0	∞	∞	$\boxed{2}$
∞	$\boxed{3}$	2	∞	3	0	∞	∞	2
9	3	2	∞	$\boxed{3}$	0	∞	∞	2
9	3	2	8	3	0	∞	$\boxed{6}$	2
9	3	2	$\boxed{8}$	3	0	10	6	2
$\boxed{9}$	3	2	8	3	0	10	6	2
9	3	2	8	3	0	$\boxed{10}$	6	2

5. Legkevesebb hány élt kell törölni az ábrán látható G gráfból ahhoz, hogy a kapott G' gráfnak legyen Euler-sétája? (Az élekre írt számoktól tekintsünk el.)

Egy gráfnak pontosan akkor van Euler-sétája, ha izolált pontoktól eltekintve összefüggő, (1 pont)
és legfeljebb két páratlan fokszámú csúcsa van. Ilyen gráfot szeretnénk létrehozni. (2 pont)
G-nek pontosan 6 páratlan fokú csúcsa van: a, b, c, d, g és f. (1 pont)
Mivel egy él elhagyása két csúcs fokszámát változtatja meg, ezért legalább két élt kell G-ből törölni ahhoz, hogy he maradjon 2-nél több páratlan fokú csúcs. (2 pont)
Ha töröljük az ab és dg éleket G-ből, akkor a kapott gráf összefüggő marad és a ptn fokú c és f csúcsok kivételével minden más csúcs fokszáma páros lesz. (2 pont)
Ezért két él törlésével elérhető az Euler-séta megléte. (1 pont)
A feladatban feltett kérdésre tehát pontosan 2 a válasz. (1 pont)

$\boxed{\star}$ Az ábrán látható G gráf kilenc várost és az azokat összekötő utakat mutatja. Úgy szeretnénk újraaszfaltozni néhány útszakaszt, hogy bármely városból bármely másik városba el lehessen jutni újraaszfaltozott útvonalon, de ehhez a lehető legkevesebb aszfaltra legyen szükség. Hogyan végezzük el ezen feltétel mellett a felújítást, ha azt is el szeretnénk érni, hogy az a városból c-be vezető felújított útvonal a lehető legrövidebb legyen? (Az élekre írt számok az adott útszakasz hosszát jelentik, az aszfaltozáshoz szükséges mennyiség pedig a hosszal arányos.)

Az órán azt tanították, hogy egy F feszítőfa pontosan akkor mkffa, ha minden G_c gráfnak tartalmazza feszítő erdejét, ahol G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta részgráf. (2 pont)
Mivel G_3-ban a és c különböző komponensbe esnek, de a G_4 gráf összefüggő, ezért a G_3 két komponensét összekötő 4 költségű gh élnek mindenképpen a mkffa ac útján kell lennie. (2 pont)
A h csúcsból csakis a he élen haladhat tovább ez az út, tehát he is a keresett ac-út éle. (1 pont)
Könnyen látható, hogy sem a és g között, sem e és c között nem vezethet az őket összekötő 2 hosszúságú élnél rövidebb út. Ezért bárhogyan is választjuk a mkffát, annak ac útjának legalább $2+4+3+2=11$ a hossza. (2 pont)

Könnyen ellenőrizhető, hogy a Kruskal-algoritmus futtatható úgy, hogy ag, gh, he, ec élei legyenek a kapott mkffának. Az ábrán egy ilyen mkffa látható. Ezért ha ennek az éleit újítjuk fel, akkor nem csupán a lehető legkevesebb aszfaltot használjuk fel, de ezen feltétel mellett a felújított szakaszokon futó ac-út is a lehető legrövidebb lesz. (3 pont)
Egy legrövidebb ac-út éleinek Kruskal-lépésekkel történő feszítőfává hízlalása elvi hibás megoldás. A Kruskal ismeretéért 1 pont jár.