A Számítástudomány alapjai

1. pZH javítókulcs (2021. 12. 15.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. 9 piréz óvodás kkanbu játékot játszik, ezért 4 párt alkot. Minden párból az egyik játékos győz, a másik veszít. (Természetesen az egyik óvodás pár nélkül marad, nem játszik.) Hányféleképp lehet kialakítani az egymás ellen játszó párokat, ha tudjuk, hogy a 456-os jelű óvodásnak van párja, de az nem a 067-es jelű, aki szintén a 9 óvodás egyike?

   Olyan módszerrel generáljuk a leszámlálandó objektumokat, amivel minden egyes beosztást pontosan egyszer kapunk meg. A 456-os játékos párját 7-féleképp választhatjuk, hisz ez bárki lehet a 067-esen kívül. (2 pont)
   A maradék 7 játékos bármelyike lehet a pár nélkül maradó játékos, ez is tehát 7 lehetőség. (2 pont)
   A maradék 6 játékos közül a legkisebb sorszámú párját 5-féleképp választhatjuk, majd a maradék 4 játékos közül a legkisebb sorszámú párjára pontosan 3 lehetőség adódik. A maradék 2 játékosnak ezek után párt kell alkotnia. (4 pont)
   Világos, hogy a fenti módszer minden beosztást pontosan egyféleképp generál, (1 pont)
   és a fenti döntések esetén a lehetőségek száma független az előző döntésektől. Ezért a válasz a fenti számok szorzata: $7^2 \cdot 5 \cdot 3 =$ (1 pont)
   $= 735.$ (0 pont)

2. Tegyük fel, hogy a K_{12} teljes gráf minden élét úgy színeztük a piros, fehér vagy zöld színek valamelyikére, hogy minden csúcsra pontosan 5 piros él illeszkedik, és a fehér élek a K_{12} egy feszítőfáját alkotják. A zöld élek pedig úgy vannak irányítva, hogy minden v-től különböző csúcsból pontosan két zöld él vezet ki. Hány zöld él lép ki a v csúcsból?

   A K_{12} éleinek száma $\binom{12}{2} = 6 \cdot 11 = 66$. (1 pont)
   A HSL miatt a piros élek száma $\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 5 = 30$. (2 pont)
   A fehér élek feszítőfát alkotnak, tehát pontosan $12 - 1 = 11$ van belőlük. (2 pont)
   Ezért a zöld élek száma $66 - 30 - 11 = 25$. (2 pont)
   Mivel minden zöld él pontosan egy csúcs kifokához járul hozzá, ezért a zöld kifokok összege a zöld élek száma, azaz $25 = 11 \cdot 2 + \delta_Z(v)$, (2 pont)
   ahonnan $\delta_Z(v) = 3$ adódik a v-ből kilépő zöld élek számára. (1 pont)

3. Van-e az alábbi G gráfnak olyan, f gyökérből indított szélességi bejárása, amelyik során ag faél? (Az élekre írt számoktól tekintsünk el.)

   Az órán azt tanították, hogy a BFS után kapott szélességi fa tartalmazza G egy legrövidebb útját az f gyökérből minden más csúcsba. (2 pont)
   Ez azt jelenti, hogy a szélességi fa minden éle két olyan csúcs között fut, amiknek a gyökértől mért távolsága pontosan 1-gyel tér el egymástól. (3 pont)
   Pl. egy konkrét BFS lefuttatásából kiderül, hogy $dist(f, a) = dist(f, g) = 3$. (4 pont)
   Ezért ag sosem lehet f-gyökerű BFS-fa éle. (1 pont)

   Ha valaki helyesen lefuttat egy BFS-t az f gyökérből ezen a gráfon, akkor pusztán ezért 2 pontot kaphat.

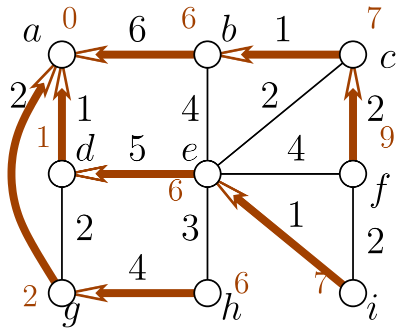
4. Határozzuk meg az ábrán látható G gráfban a $dist(v, a)$ távolságot G minden $v \neq a$ csúcsára. Lehetséges-e úgy irányítani G gráf éleit, hogy minden $v \neq a$ csúcs esetén legyen olyan irányított út v-ből a-ba, aminek az irányítatlan változata G egy legrövidebb va-útja?
   (Az élekre írt számok az élek hosszait jelentik.)

Mivel a G-beli élek hosszai nemnegatívok, ezért az a csúcsból futtatva a Dijkstra algoritmust a megadott élhosszokkal, meg tudjuk határozni minden v csúcsra a $dist(v, a)$ távolságot. (1 pont)

Az alábbi táblázat mutatja a Dijkstra algoritmus futása során az (a, ℓ)-felső becslések alakulását ill. a KÉSZ halmaz bővülését. Az utolsó sorban szereplő végső becslések a keresett $dist(v, a)$ távolságokat adják meg. (6 pont)

a	b	c	d	e	f	g	h	i
$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0	6	∞	$\boxed{1}$	∞	∞	2	∞	∞
0	6	∞	1	6	∞	$\boxed{2}$	∞	∞
0	$\boxed{6}$	∞	1	6	∞	2	6	∞
0	6	7	1	$\boxed{6}$	∞	2	6	∞
0	6	7	1	6	10	2	$\boxed{6}$	7
0	6	$\boxed{7}$	1	6	10	2	6	7
0	6	7	1	6	9	2	6	$\boxed{7}$
0	6	7	1	6	$\boxed{9}$	2	6	7

Az órán azt tanították, hogy ha minden gyökértől különböző csúcsra megjelöljük az adott csúcsnál a végső (a, ℓ)-felső becslést beállító élt (az ábrán ezt megtettük barna színnel), akkor az a gyökérből egy legrövidebb utak fáját kapjuk meg: ezen a fán a-t minden más csúccsal a G egy legrövidebb útja köti össze. Ezért ha a barna éleket a barna élek alkotta fán a-felé irányítjuk, akkor a többi él irányításától függetlenül minden v csúcsra lesz a legrövidebb va-utak között egy irányított út is. Ezért a feladat második kérdésére igenlő a válasz. (3 pont)



Az is hibátlan érvelés, ha nem részletezett módon megtalálunk egy feszítőfát (pl. az ábrán barnával jelzettet) és arra hivatkozunk, hogy a fán mért (barnával jelzett) távolságok egyrészt felső becslést adnak a legrövidebb utak hosszaira, másrészt pedig ezen az (f, ℓ)-felső becslésen egyetlen élmenti javítás sem tud változtatni. Ezért az a csúcsig mért távolságok pontosan a barna élek fáján mért távolságok, másrészt a barna éleket a felé irányítva megkapjuk, amit keresünk.

5. Van-e az ábrán látható G gráfnak olyan Hamilton-köre, ami nem tartalmazza az ab élt? (Az élekre írt számoktól tekintsünk el.)

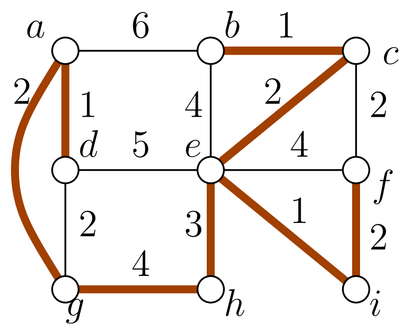
Azt a kérdést kell megválaszolnunk, hogy a $G - ab$ gráfnak van-e Hamilton-köre. (2 pont)

A Hamilton-kör létezésének szükséges feltétele, hogy ha a gráfból k csúcsot törlünk, akkor a kapott részgráf komponenseinek a száma legfeljebb k legyen. (3 pont)

A $G - ab$ gráfból törölve az e csúcsot, két komponens adódik. (4 pont)

Ezért a Hamilton-kör létezésének szükséges feltétele nem teljesül, nincs tehát G-nek olyan Hamilton-köre, ami nem tartalmazza az ab élt. (1 pont)

$\star$ Legfeljebb mennyivel tud növekedni az ábrán látható gráf minimális költségű feszítőfájának költsége akkor, ha a gráf egy tetszőlegesen választott élének költségét tetszőlegesen megváltoztatjuk? (Az élekre írt számok az adott él költségét jelentik.)



Az ábrán látható a G egy Kruskal-algoritmus által megtalált F mkffája. Ehhez az élekről növekvő költség szerint döntöttünk: egy élt pontosan akkor vettünk be F-be, ha nem alkotott kört a korábban bevettekkel. (2 pont)

Ha egy él költségét csökkentjük, akkor az új költségekhez tartozó mkffa költsége nem növekedhet, egy él költségének növelésétől pedig a módosított költségekhez tartozó mkffa költsége nem csökkenhet. Ezért azt kell megállapítanunk, hogy melyik az az él, aminek a költségét végtelenre növelve a módosított költségekhez tartozó mkffa költsége a lehető legnagyobb lesz. (2 pont)

Világos, hogy ha egy, az ábrán látható mkffában nem szereplő él költségét növeljük, akkor az F költsége nem változik, tehát a mkffa költsége sem növekedhet. (1 pont)

Azt kell csupán ellenőrizni, hogy ha az F egyes éleinek költségét ∞-re módosítjuk, hogyan növekszik az új költségekhez tartozó mkffa költsége. (1 pont)

Ha az ad vagy ag élt módosítjuk, akkor dg kerül be a mkffába, a költség tehát nem változik, vagy 1-gyel növekszik. Ha gh vagy he nő meg, akkor de kerül a fába, az összköltség 1-gyel vagy 2-vel nő. Ha ec, ei vagy fi nő ∞-re, akkor cf kerül a fába, a költség tehát ismét nem változik vagy 1-gyel növekszik. Végül, ha bc költsége száll el, akkor eb kerül a fába, azaz 3-mal növekszik a mkffa költsége. (3 pont)

Tehát a feladat kérdésére az a válasz, hogy a mkffa költsége legfeljebb 3-mal tud növekedni egyetlen élköltség megváltozásától. (1 pont)

A Számítástudomány alapjai

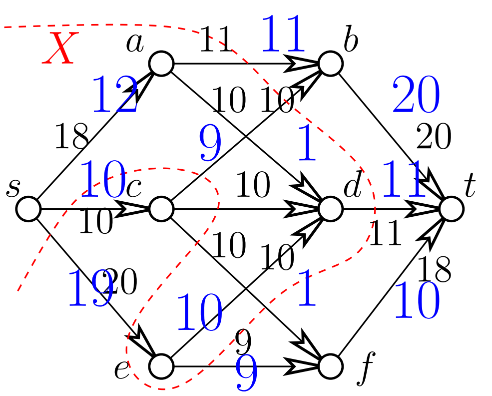
2. pZH javítókulcs (2021. 12. 15.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Határozzuk meg az ábrán látható G gráf kromatikus számát, és állapítsuk meg, hogy egyetlen él törlésével elérhető-e, hogy a kapott G' gráf kromatikus számára $\chi(G') = \chi(G) - 1$ teljesüljön. (Az élekre írt számoktól és az élek irányításától tekintsünk el.)

   A G gráf két színnel kiszínezhető, azaz páros, a két színosztály pedig $\{s, b, d, f\}$ ill. $\{a, c, e, t\}$. (4 pont)
   Mivel G-nek van éle, ezért 1 szín nem elég a csúcsok színezéséhez, tehát G kromatikus száma $\chi(G) = 2$. (2 pont)
   Ha egyetlen él törlése után a kapott G' gráf kromatikus száma $\chi(G') = \chi(G) - 1 = 2 - 1 = 1$ lesz, az azt jelenti, hogy G' nem tartalmaz élt. (3 pont)
   Mivel G-nek egynél több éle van, ezért bármely él törlése után marad még él, tehát $\chi(G') > 1$ teljesül. A feladat kérdésére a válasz tehát nemleges: bármelyik élt is töröljük, a kromatikus szám ettől nem változik. (1pont)

2. Keressünk az ábrán látható hálózatban maximális nagyságú st-folyamot. Változik-e a maximális folyamnagyság akkor, ha a cd él kapacitását π-vel csökkentjük?

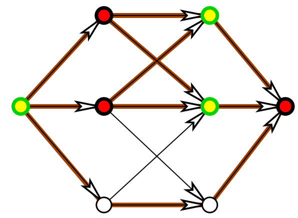
   A javító utas algoritmussal meghatároztuk az ábrán látható 41 nagyságú st-folyamot. Ehhez az $sabt(11)$, $scdt(10)$, $seft(9)$, $sadt(1)$, $sedcbt(9)$ ill. $sedcft(1)$ javításokat végeztük, a zárójelben az adott javítás során küldött folyammennyiség áll. (5 pont)
   A kapott folyamhoz tartozó segédgráfban s-ből az $X = \{s, a, d, e\}$ csúcsok érhetők el javító úton, és ez az X halmaz egy 41 kapacitású st-vágást indukál. Ezért a megtalált 41 nagyságú folyam csakugyan maximális. (3 pont)
   A cd él kapacitásának csökkentésétől a talált f folyam megengedett marad. Ezért a maximális folyamnagyság sem csökkenhet ettől, így a feladat második kérdésére nemleges a válasz. (2 pont)
   A folyam maximalitásának igazolásához nem szükséges a folyamalgoritmusra hivatkozni: ha valaki (bárhogy) talál egy 41 nagyságú folyamot, és egy 41 kapacitású vágást, és erre megfelelően hivatkozik, akkor azért jár a pont. (Vagy éppenséggel akkor is, ha világosan kijelenti (és bizonyítja), hogy a 41 nagyságú folyamhoz tartozó segédgráfban már nincs st-út.) Ha azonban csak egy 41 nagyságú folyamra mutat rá a megoldó (amiről nem világos, hogyan keletkezett), és bizonyítékot nem ad a maximalitásra, akkor ez csak minimálisan visz közelebb a megoldáshoz.

3. Tegyük fel, hogy a G páros gráfban $\alpha(G) = 21 = \nu(G)$ teljesül a független pontok ill. a független élek maximális számára. Hány csúcsa van G-nek?

   G páros gráf, ezért nem tartalmaz hurokélt. Gallai I. tétele miatt $\alpha(G) + \tau(G) = |V(G)|$. (4 pont)
   Kőnig tétele szerint minden páros gráfra, így G-re is teljesül, hogy $\nu(G) = \tau(G)$. (4 pont)
   ezért G csúcsainak száma $|V(G)| = \alpha(G) + \tau(G) = \alpha(G) + \nu(G) = 21 + 21 = 42$. (2 pont)

4. Síkbarajzolható-e az ábrán látható G gráf? (Az élekre írt számoktól és az élek irányításától tekintsünk el.)

Kuratowski tanult tétele szerint G pontosan akkor síkbarajzolható, ha nem tartlamazza részgráfként sem a K_5 sem pedig a $K_{3,3}$ gráf soros bővítését. Ha tehát mutatunk egy ilyen tiltott részgráfot, akkor abból azonnal adódik, hogy G nem síkbarajzolható. (3 pont)



Az ábra egy G egy olyan részgráfját mutatja, ami $K_{3,3}$ soros bővítése. E tiltott részgráf miatt pedig G nem síkbarajzolható. (7 pont)

5. Hány olyan $1 < m$ egész szám van, amire teljesül a $42 \equiv 4242(m)$ kongruencia?

A kongruencia definíciója alapján azokat az $m > 1$ egészeket keressük, amire $m \mid 4242 - 42 = 4200$ teljesül. (3 pont)
Ezek szerint a 4200-nak az 1-nél nagyobb osztói számára vagyunk kíváncsiak. (1 pont)
A 4200 kanonikus alakja $4200 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$, (2 pont)
ezért $d(4200) = (3+1) \cdot (1+1) \cdot (2+1) \cdot (1+1) = 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 48$ (3 pont)
Mivel $1 \mid 4200$ is pozitív osztó, ezért a keresett m-ek száma 47. (1 pont)

$\boxed{\star}$ Tegyük fel, hogy a G gráfnak $|V(G)| = 42$ csúcsa van, és kromatikus száma $\chi(G) = 24$. Bizonyítsuk be, hogy G-nek van olyan e éle, amire $\chi(G - e) = 23$.

Tekintsük G egy 24 színnel történő kiszínezését! Ha ebben a színezésben legfeljebb egy olyan színosztály lenne, amelyik csupán egyetlen csúcsot tartalmaz, akkor G csúcsainak száma legalább $2 \cdot 23 + 1 = 47$ volna. Ezért G-nek legalább két olyan színosztálya van, amelyik egyetlen csúcsot tartalmaz. (4 pont)
Legyenek u és v két olyan csúcs, amelyekkel azonos színre egyetlen egy másik csúcsot sem színeztünk a fenti színezésben. Ekkor ha uv nem lenne éle a G gráfnak, akkor v-t átszínehetnénk u színére, és így egy G egy 23 színnel történő színezését kapnánk, ami lehetetlen, hisz $\chi(G) = 24$. Ezek szerint u és v szomszédosak G-ben, legyen $e = uv$. (3 pont)
A fenti gondolatmenet mutatja, hogy $G - e$ 23 színnel kiszínezhető, hisz ha a G 24 színre történő színezésében a v-t átszínezzük u színére, akkor $G - e$ egy 23 színnel történő színezét kapjuk. (1 pont)
Másfelől, ha $G - e$ 22 színnel kiszínezhető lenne, akkor v-t átszínezve egy 23-dik színre a G egy 23 színnel történő színezését kapnánk. Ez $\chi(G) = 24$ miatt lehetetlen. (1 pont)
Ezek szerint $\chi(G - e) = 23$, ami igazolja a feladat állítását. (1 pont)