A számítástudomány alapjai 2021. I. félév

9. gyakorlat. Összeállította: Fleiner Tamás (`fleiner@cs.bme.hu`)

Tudnivalók

Def: Ha $G = (V, E)$ és $X \subseteq V$ akkor $N(X) := \{v \in V : \exists x \in X, vx \in E\}$ az X ponthalmaz G-beli szomszédsága.

Hall tétel: Tetsz. $G = (A + B, E)$ páros gráfnak pontosan akkor létezik A-t fedő párosítása, ha az bármely $X \subseteq A$ csúcshalmazra $|X| \le |N(X)|$ teljesül.

Frobenius tétele: Tetsz. $G = (A+B, E)$ páros gráfnak pontosan akkor létezik teljes párosítása, ha (1) $|A| = |B|$ és (2) $|X| \le |N(X)|$ teljesül tetszőleges $X \subseteq A$ részhalmazra.

Kőnig tétel: Ha G véges, páros gráf, akkor $\tau(G) = \nu(G)$.

Alternáló utas algoritmus:

Input: $G = (A + B, E)$ ps gráf. Output: M maximális párosítás.

Kiindulunk az $M = \emptyset$ párosításból, és javító utat keresünk. Ez olyan ú.n. alternáló út, aminek felváltva M-beliek és M-en kívüliek az élei és A egy fedetlen pontjából B fedetlen pontjába vezet. Ilyet pl úgy kereshetünk, hogy M éleit B-ből A-ba, G többi élét pedig A-ból B-be irányítjuk, majd BFS-sel ellenőrizzük, hogy van-e irányított út a megfelelő fedetlen pontok között. Ha van ilyen út, akkor az egy javító út. Ha találtunk ilyet, akkor az út M-beli éleit kidobjuk M-ből, az M-en kívülieket pedig bevesszük M-be. Ezáltal egy újabb párosítást kapunk, ami a korábbinál eggyel több élt tartalmaz. Ezt követően újabb javító utat keresünk. Ha már nincs javító út, akkor az aktuális M párosítás maximális, azaz a mérete $\nu(G)$. Az A-beli fedetlen csúcsból alternáló úton elérhető B-beli csúcsokkal és az M által fedett, A-beli fedetlen csúcsból alternáló úton nem elérhető A-beli csúcsok egy $\nu(G)$ méretű lefogó ponthalmazt alkotnak.

Gyakorlatok

1. Igazoljuk, hogy tetszőleges izolált pontot nem tartalmazó G páros gráfra $\alpha(G) = \rho(G)$ teljesül.(✓)
2. Tegyük fel, hogy a 88 pontú G páros gráf egy lefogó élhalmaza független élekből áll. Határozzuk meg $\tau(G)$ értékét, azaz a G-t lefogó pontok minimális számát. (ZH'14)
3. Gyakoroljuk az alternáló utas algoritmust kis gráfokon. (✓)
4. Tegyük fel, hogy a G páros gráf k-reguláris, azaz minden csúcsának a fokszáma k valamely $k \ge 1$ egészre. Bizonyítsuk be, hogy G-nek van teljes párosítása. Igazoljuk azt is, hogy G élei úgy színezhetők ki k színnel, hogy minden csúcsból különböző színűek élek induljanak. (*!)
5. Egy $n \times n$ méretű táblázat néhány mezejét zöldre festették úgy, hogy bárhogyan is választunk ki k sort, az azokban található zöld mezők legalább k oszlophoz tartoznak. Bizonyítsuk be, hogy kiválasztható n zöld mező úgy, hogy azokra bástyákat állítva a bástyák közül semelyik kettő sem üti egymást. (!)
6. A házassági tanácsadáson n pár ücsörög a váróban. Ebben a kiélezett helyzetben mindenki az asztalon heverő magazinok közül próbál egy számára érdekeset megkaparintani. Tudjuk, hogy minden várakozó legalább n magazint talál érdekesnek, ám valamiféle különös ok folytán nincs olyan magazin, amit ugyanannak a házaspárnak mindkét tagja szívesen forgatna. Bizonyítsuk be, hogy mindenki egyszerre találhat kedvére való olvasnivalót.
7. Tegyük fel, hogy a G egyszerű, páros gráf A színosztálya 28, a B színosztálya 33 pontú. Tegyük fel, hogy a B színosztálynak valemely Y részhalmazára $|Y| = 18$ és $|N(Y)| = 12$. Mutassuk meg, hogy az A színosztályra nem teljesül a Hall feltétel, azaz létezik olyan $X \subseteq A$ halmaz, melyre $|N(X)| < |X|$. (ZH '14)
8. Tegyük fel, hogy a 88 pontú G páros gráfban $\alpha(G) = 44$. Igazoljuk, hogy G-re teljesül a Hall feltétel, azaz $|X| \le |N(X)|$ az A színosztály minden X részhalmaza esetén. (pZH '14)
9. Tegyük fel, hogy a G egyszerű, páros gráf mindkét színosztálya egyenként 99 pontot tartalmaz, az A színosztályban minden pont foka legalább 66, B-ben pedig legalább 33. Mutassuk meg, hogy G-nek van teljes párosítása. (ZH '15)
10. Tegyük fel, hogy $G = (A + B, E)$ egyszerű, páros gráf A színosztályában 99 csúcs van, ezek bármelyikének a fokszáma legalább 33, de A-ban van 66 olyan csúcs, amelyek bármelyikének foka legalább 66. Sőt, A tartalmaz 33 olyan csúcsot is, amelyek mindegyikéből legalább 99 él indul. Mutassuk meg, hogy G-nek van A-t fedő párosítása. (pZH '15)