A számítástudomány alapjai 2021. I. félév

7. gyakorlat. Összeállította: Fleiner Tamás (`fleiner@cs.bme.hu`)

Tudnivalók

Def: A G egyszerű gráf csúcsainak egy *k-színezésén* az $1, 2, \ldots, k$ színeknek a csúcsokhoz való olyan hozzárendelését értjük, melyben szomszédos csúcsok különböző színt kapnak. (Formálisan, egy olyan $f : V \to \{1, 2, \ldots, k\}$ függvény, amire $uv \in E \Rightarrow f(u) \neq f(v)$.) Egy ($k$-)színezésben az azonos színt kapó csúcsok halmazát *színosztály*nak nevezzük. (Színosztályon belül G-nek nem futhat éle.) A G gráf *kromatikus száma* $\chi(G) = k$, ha G kiszínezhető k színnel, de $(k-1)$-gyel nem.

Def: A G gráf *páros*, ha G 2-színezhető, azaz ha $\chi(G) \leq 2$.

Tétel: (A G gráf páros) $\iff$ (G-ben nincs páratlan kör)

Def: A G gráf *klikkje* a G egy teljes részgráfja. A G legnagyobb klikkjének méretét $\omega(G)$ jelöli. (Azaz $\omega(G) = k$, ha G-ben van k páronként szomszédos csúcs, de $k+1$ már nincs.)

Def: A G gráf csúcsainak U részhalmaza *független ponthalmaz* ha U nem feszít élt, azaz U-nak semelyik két csúcsa sem szomszédos egymással. A legnagyobb független ponthalmaz méretét $\alpha(G)$ jelöli, azaz $\alpha(G) = k$, ha van G-nek k páronként nem szomszédos pontja, de $k+1$ nincs.

Megfigyelés: Ha G egyszerű, akkor $\omega(G) = \alpha(\overline{G})$.

Állítás: Ha G véges, egyszerű, akkor $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ valamint $\alpha(G) \cdot \chi(G) \geq |V(G)|$.

Mohó színezés: G csúcsait egy rögzített sorrendben kiszínezzük úgy, hogy a soron következő csúcs az első olyan színt kapja, ami nem különbözik a korábban kiszínezett szomszédai színétől.

Def: A G gráf csúcsainak U részhalmaza *lefogó* tulajdonságú, ha U *lefogja* G minden élét, azaz G minden élének van U-beli végpontja, más szóval $G - U$ üres gráf. A G minimális méretű lefogó ponthalmazának mérete $\tau(G) = k$ ha van k méretű lefogó ponthalmaz G-ben, de $k-1$ méretű nincs.

Def: A $G(V, E)$ gráfban éleinek M részhalmaza *független* (más szóval *párosítás*), ha F élei diszjunktak, azaz G bármely csúcsa legfeljebb egy élnek végpontja. (És M-ben hurokélek sincsenek.) A G-beli független élek maximális számát $\nu(G) := \{|M| : M \text{ a } G \text{ párosítása}\}$ jelöli, tehát $\nu(G) = k$, ha G-nek van k páronként diszjunkt éle, de $k+1$ nincs. A G gráf egy *teljes párosítása* alatt a G olyan F párosítását értjük, amely G minden pontját *fedi*, azaz V minden pontjából indul F-nek éle.

A G éleinek F részhalmaza *lefogó élhalmaz* ha $V(F) = V(G)$, azaz G minden csúcsából indul legalább egy F-beli él. A lefogó élhalmazok közül a legkisebb mérete $\rho(G)$, vagyis $\rho(G) = k$, ha k él le tudja fogni G minden pontját, de $k-1$ nem.

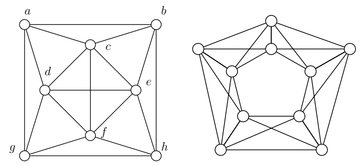
Megfigyelés: Tetszőleges véges $G = (V, E)$ gráfra (1) $\nu(G) \leq \frac{1}{2}|V|$ és (2) $\nu(G) \leq \tau(G)$, (3) $\alpha(G) \leq \rho(G)$ (ha G-nek nincs izolált pontja), (4) $U \subseteq V$ pontosan akkor független, ha $V \setminus U$ lefogó ponthalmaz. Végül (5) $\alpha(G) = \omega(\overline{G})$, ha G egyszerű.

Gallai tételei: Tetszőleges véges, n pontú G gráfra (1) $\tau(G) + \alpha(G) = n$ ha G hurokélmentes, és (2) $\nu(G) + \rho(G) = n$ ha G-ben nincs izolált pont.

Táblázatba sűrített tudomány *: később igazoljuk.

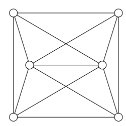
$\alpha \leq \rho$	**max ftn**	**min lef**	ps gráfra $\nu = \tau$ (Kőnig)*
pont	α	τ	$\nexists$ hurokél: $\alpha + \tau = n$ (Gallai 1)
él	ν	ρ	$\nexists$ iz. pont: $\nu + \rho = n$ (Gallai 2)
$\nu \leq \tau \leq 2\nu$			ps gráfra ($\nexists$ iz. pont) $\alpha = \rho$ (Kőnig)*

Gyakorlatok



1. Mennyi az ábrán látható két gráf kromatikus száma? (✓) (ZH '17,'18)
2. Állapítsuk meg, hány szín kell a bal oldali ábrán látható G gráf a, b, c, d, e, f, g, h sorrendben történő mohó színezéséhez. Milyen színt kap ekkor a h csúcs? (✓) (ZH '17)
3. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges G gráf csúcsait alkalmas sorrendben mohón színezve pontosan $\chi(G)$ színt használunk fel.
4. A G gráf csúcsait a sakktábla mezői, éleit pedig a huszár (bástya, futó, király) lehetséges lépései alkotják. Mennyi a G gráf $\chi(G)$ kromatikus száma?
5. Legyen $V(G) = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$, és legyen $ij \in E(G)$, ha $|i - j| \leq 7$. Mennyi az így meghatározott G gráf $\chi(G)$ kromatikus száma? (✓)

6. Van-e olyan G gráf, amiben nincs K_4 klikk, de G mégsem színezhető ki 3 színnel? (✓)
7. Legyenek K és H a G gráf két komponense. Legyen G' az a gráf, amit G-ből úgy kapunk, hogy K minden pontját összekötjük H minden pontjával. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) = \max\{\chi(K), \chi(H)\}$ ill. $\chi(G') = \chi(H) + \chi(K)$. (✓)
8. Igazoljuk, hogy ha G egyszerű gráf, akkor $|E(G)| \geq \binom{\chi(G)}{2}$.
9. Legfeljebb mennyi lehet egy legfeljebb 100-élű egyszerű gráf kromatikus száma?
10. Legfeljebb hány éle lehet annak az n csúcsú G gráfnak, amire $\chi(G) \leq 2$? És ha $\chi(G) \leq 3$?
11. Mik azok a véges, egyszerű G gráfok, melyekre $\chi(G) = 3$ és $\chi(G - e) < 3$ $\forall e \in E$? Milyen n-csúcsú, egyszerű G gráfra teljesül, hogy $\chi(G) = 3$ és $\chi(G - v) < 3$ $\forall v \in V$?
12. Legyen a H gráf csúcshalmaza $\{1, 2, \ldots, 74\}$, és az i, j csúcsok között pontosan akkor menjen él, ha az $0 < |i - j| \leq 2$. Határozzuk meg a $\nu(G), \tau(G), \rho(G), \alpha(G)$ gráfparamétereket.
13. Legyen G egy n pontú egyszerű gráf, melynek maximális klikkmérete $\omega(G) = 2$ és kromatikus száma $\chi(G) = k$. Képezzük a G' gráfot úgy, hogy lerajzoljuk a G gráf k diszjunkt példányát, és felveszünk még n^k további pontot pontot. Minden ilyen pontnak G minden egyes példányából $1-1$ szomszédja lesz, mégpedig úgy, hogy ne legyen két ilyen pontnak azonos a szomszédsága. Mutassuk meg, hogy $\omega(G') = 2$, valamint, hogy $\chi(G') = \chi(G) + 1 = k + 1$ teljesül.
14. Igazoljuk Mycielski tételét, miszerint tetszőleges $k \geq 2$ egészre létezik olyan G_k gráf, melyre $\chi(G_k) = k$ és $\omega(G_k) = 2$.
15. Tegyük fel, hogy G minden csúcsa úgy van kiszínezve a piros és zöld színek valamelyikére, hogy G-nek nincs olyan páratlan hosszúságú köre, amelynek csúcsai egyszínűek. Igazoljuk, hogy G kromatikus számára $\chi(G) \leq 4$ teljesül. (*)
16. Bizonyítsuk be, hogy ha G egyértelműen színezhető 3-színnel (azaz G bármely 3-színezéséből bármely másik 3-színezése megkapható a színek cseréjével), akkor $|E(G)| \geq 2|V(G)| - 3$. (*)
17. Az F élhalmaz a G gráfban egyszerre lefogó és független. Mit mondhatunk F-ről? Az U ponthalmaz a G gráfban egyszerre lefogó és független. Mit mondhatunk G-ről és U-ról? (✓)
18. Igazoljuk, hogy tetszőleges véges G gráfra $\tau(G) \leq 2\nu(G)$ teljesül.(✓)
19. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges n-csúcsú, egyszerű G gráfra $\tau(G) - \nu(G) < \frac{n}{2}$ teljesül.
20. Bizonyítsuk be, hogy bármely 2-reguláris páros gráfban (tehát amiben minden fokszám 2) a különböző teljes párosítások száma mindig 2-nek valamilyen pozitív egész kitevős hatványa.(✓)
21. Tfh a G 110 pontú gráf és lefogható 73 éllel. Igazoljuk, hogy G-nek van 37 élű párosítása. (✓)
22. Határozzuk meg a C_n kör, a K_n ill. a $K_{n,n}$ teljes páross gráf α, τ, ν ill. ρ paramétereit. (✓)
23. Tfh G egyszerű, $|V(G)| = 2000$ és $\tau(G) = 678$. Igazoljuk, hogy G-ben nincs teljes párosítás!
24. Legyen G egy olyan egyszerű gráf, amelynek 1000 csúcsa van és minden csúcs fokszáma legalább 6. Igazoljuk, hogy $\nu(G) \geq 6$.
25. Határozzuk meg az ábrán látható G gráfra az $x = \nu(G) \cdot \alpha(G) \cdot (\tau(G) + \rho(G))$ kifejezés értékét. (ν: ftn élek, α: ftn pontok, τ: lef pontok, ρ: lef élek.) (ZH '19)



26. Igazoljuk, hogy $\omega(\overline{G}) \leq 75$, ha G egyszerű, összefüggő, 100-csúcsú és van 25 élű párosítása.
27. Legyen a G gráf csúcshalmaza $\{1, 2, \ldots, 2001\}$, és az i, j csúcsok között pontosan akkor menjen él, ha (a) az $i + j$ szám 3-mal osztva 1 maradékot ad ill. (b) ha az $i + j$ és 74 relatív prímek. Határozzuk meg mindkét esetben a $\nu(G), \tau(G), \rho(G), \alpha(G)$ gráfparamétereket. (✓)