

A számítástudomány alapjai 2021. I. félév

6. gyakorlat. Összeállította: Fleiner Tamás (fleiner@cs.bme.hu)

Tudnivalók

Def: A $G = (V, E)$ gráf *Euler-(kör)sétája* a G olyan (kör)sétája, mely G minden élét tartalmazza.

Megfigyelés: Ha a véges G (irányított) gráfnak létezik Euler-körsétája, akkor (1) G izolált pontoktól eltekintve (irányítatlan értelemben) összefüggő és (2) G minden csúcsának fokszáma páros (irányított esetben minden v csúcsra $\delta(v) = \rho(v)$). Ha G -ben létezik Euler-séta, akkor (1) mellett teljesül, hogy (2') G -nek legfeljebb 2 páratlan fokú csúcsa van ($\sum_{v \in V} |\delta(v) - \rho(v)| \leq 2$).

Tétel: Tetszőleges $G = (V, E)$ véges gráfra G -nek pontosan akkor van Euler-körsétája (Euler-sétája), ha a fenti (1) és (2) ((1) és (2')) teljesül.

Def: A G gráf *Hamilton-köre* (*Hamilton-útja*) egy G minden csúcsát tartalmazó kör (út).

Állítás: Ha a véges G gráfban létezik Hamilton-kör (ill. Hamilton-út), akkor G -nek k tetszőleges pontját törölve, a keletkező gráfnak legfeljebb k (ill. $k + 1$) komponense van.

Dirac tétele: Ha az n -pontú ($n \geq 3$), egyszerű G gráf minden pontjának legalább $\frac{n}{2}$ a fokszáma, akkor G -nek van Hamilton-köre.

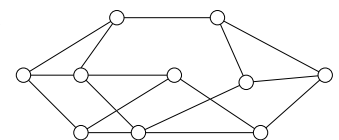
Ore tétele: Ha az n -pontú ($n \geq 3$), egyszerű G gráf olyan, hogy $uv \notin E(G)$ esetén $d(u) + d(v) \geq n$, akkor G -nek létezik Hamilton-köre.

Lemma: Ha egy n -pontú G gráfban $d(u) + d(v) \geq n$, akkor G -nek pontosan akkor van Hamilton-köre, ha $G + uv$ -nek Hamilton-köre van.

Köv.: Ha van Hamilton-köre egy olyan G' -nek, amit a fenti Lemmában leírt élek behúzásával kapunk G -ből, akkor G -nek is van Hamilton-köre.

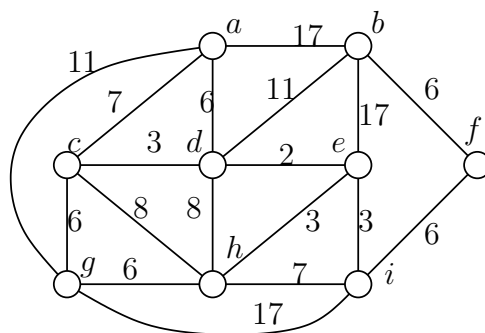
Gyakorlatok

- Legyen G a $\{p_1, p_2, \dots, p_{2001}\}$ ponthalmazon az az egyszerű gráf, amire $(p_i p_j \in E(G)) \iff |i - j| \leq 2$. Van-e G -ben Euler-körséta, Euler-séta, Hamilton-kör ill. Hamilton-út? (✓)(V '01)
- Legyenek a G_n gráf pontjai az n hosszú $(0, 1)$ sorozatok. Két pont akkor legyen szomszédos, ha pontosan egy helyen térnek el egymástól (pl. az $n = 4$ esetben $(0, 0, 0, 1)$ és $(0, 1, 0, 1)$ szomszédosak). Van-e a G_n gráfnak Euler-körsétája (✓) ill. Hamilton-köre? (ZH '01)
- Bizonyítsuk be, hogy ha egy $G = (V, E)$ véges gráfban minden pont fokszáma páros, akkor az E élhalmaz felbontható páronként éldiszjunkt körök uniójára. (!)
- Tegyük fel, hogy $G = (V, E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_k)$ összefüggő gráfban az E_i -k egymástól diszjunkt körséták. Az alábbi sétát végezzük az éleken. Tetszőleges pontjából indulva elkezdjük követni az E_1 körsétát. Mindig egy E_j körsétát követünk azzal, hogy amint olyan csúcsba érünk, amin átmegegy eddig nem látott E_ℓ körséta, akkor elkezdjük E_ℓ -t követni, majd amint befejeztük, folytatjuk a felhagyott E_j követését. Mit kapunk, amikor befejezzük az E_1 körsétát? (*)
- Mutassuk meg, hogy ha G egy 12-reguláris gráf, akkor élei pirosra és zöldre színezhetők úgy, hogy minden csúcsból pontosan 6 piros és 6 zöld él induljon. (!)
- Igazoljuk, hogy tetszőleges véges gráf élei irányíthatók úgy, hogy minden v csúcsra $|\delta(v) - \rho(v)| \leq 1$ teljesüljön, ahol $\delta(v)$ ill. $\rho(v)$ a v csúcs ki- ill. befokát jelenti.
- Drótból szeretnénk egy 4×4 -es négyzetrácsot forrasztani, ahol az egyes négyzetek oldalhossza pontosan 1 cm. Megoldható-e a feladat akkor, (a) ha 8 db 5 cm-es drótunk van ill. (b) ha 5 db 8 cm-es drótot használhatunk? A drótokat elvágni nem, csak forrasztani szabad.
- A mellékelt ábra Abszurdisztán fővárosa szennyvízhálózatának vázlatos rajzát mutatja. A vonalak a csatornákat jelképezik. Minden egyes csomópontban, ahol csatornák találkoznak, egy-egy létra vezet a felszínre. Nem zárható ki, hogy úgynevezett endzsió terroristák egy sátáni terv keretében valahol megmérgezték a szennyvízhálózatot. Ezért fertőtleníteni kell minden egyes csatornát, aminek az a módja, hogy a közszolgálati csatornák élő közvetítésében egy erre a feladatra speciálisan kiképzett szakember súlyos védőfelszerelésben végigkúszik a csöveken. Mivel a szakfanderre is rátapadhat a szennyvizet szennyező ismeretlen mérge, a már fertőtlenített szakaszra nem szabad ismételt behatolni. Legalább hányszor kell a szakembernek kievickélnie a csatornából ahhoz, hogy a teljes fertőtlenítést elvégezhesse? (ZH '08)
- Van-e olyan egyszerű gráf, melynek van Euler-körsétája, továbbá páros számú pontja és páratlan számú éle van? (✓)



10. Mutassuk meg, hogy bármely összefüggő gráf élei bejárhatók úgy, hogy mindegyiken kétszer megyünk végig, és pedig mindkét irányban egyszer-egyszer.
11. Tegyük fel, hogy a $G = (V, E)$ gráfban minden fokszám páros és $X \subseteq V$. Igazoljuk, hogy X -et páros számú él köti össze $V \setminus X$ -szel.
12. Van-e olyan 222 pontú G gráf, hogy G -nek és \bar{G} komplementerének is van Euler-sétája? (✓)
13. A bölcsiben nyuszis-cicás dominókkal játszanak a gyerekek: a 24 darabos készlet kövei a 4-féle nyusziból és 6-féle cicából alkotható párok. Lehet-e az összes dominóból olyan kört alkotni, ahol az egymást követő köveken egymás mellett álló képek megegyeznek? (*)
14. Egy ajtót kell kinyitnunk úgy, hogy egy 10-gombos billentyűzeten egy általunk ismeretlen, titkos 3-jegyű számkód jegyeit egymás után begépeljük. (Az előzőleg lenyomott számok a nyitást nem befolyásolják.) Mennyi az a legkisebb összeg, amennyiért az ajtó bizonyosan kinyitható, bármi legyen is a titkos kód, ha minden egyes gombnyomás 1 Ft-ba kerül? (*)
15. Kritikus a helyzet: Abszurdisztán fővárosát, Mutyipusztát savköpő menyétek inváziója fenyegeti. A jobb oldali ábrán látható a főváros térképe: az egyes utak mellett álló számok az adott útvonal hosszát jelölik. A veszélyt — mint mindig — most is az ügyeletes szuperhős,

Órarugógerincű Felpattanó hárítja el. Mesteri tervének végrehajtása mellett (miszerint helikopterről lúgot permetezve semlegesíti a betolakodókat) még ebben a válságos pillanatban is a közvagyon megóvása a legfőbb célja. Ezért amellett, hogy minden utcát végigpermetez és visszatér a szabadon választott kiindulási pontra, szeretné egyúttal minimalizálni a lerepült ösztávót is. Segítsünk Órarugógerincűnek abban, hogyan válasszon útvonalat! (*) (ZH '16)



16. Bejárható-e a 4×4 -es sakktábla egy huszárral úgy, hogy minden mezőt pontosan egyszer érintünk? (A huszár mindig egy 3×2 -es téglalap egyik csúcsából az átellenes csúcsába lép.) Mi a válasz valódi sakktábla esetén? (A valódi sakktábla 8×8 -as.)
17. Bizonyítsuk be, hogy ha egy $2n$ -pontú G gráfban van Hamilton-kör, akkor kiválasztható G -nek néhány diszjunkt élé úgy, hogy G minden pontja végpontja valamelyik kiválasztott élnek. (✓)
18. Mutassuk meg, hogy ha egy G gráfban van Hamilton-kör, akkor a $G - v$ ill. a $G - e$ gráf G bármely v csúcsára és bármely e élére is összefüggő. (✓)
19. Tegyük fel, hogy G öf gráf és K egy olyan köre G -nek, aminek tetszőleges élet törölve, a kapott út G egy leghosszabb útja. Bizonyítsuk be, hogy K a G Hamilton-köre.
20. Legalább hány élé van egy olyan hat pontú gráfnak, melynek van Hamilton-köre? (✓)
21. Igazoljuk, hogy ha egy 3-reguláris G gráfban van Hamilton-kör, akkor G élei három színnel színezhetőek úgy, hogy azonos színű éleknek ne legyen közös végpontjuk.
22. Legyen G egy $2n$ csúcsú egyszerű gráf és tegyük fel, hogy G minden csúcsának legalább n szomszédja van. Bizonyítsuk be, hogy ha G minden élének ki szeretnénk választani legalább egy végpontját, akkor G -nek legalább n csúcsát kell kiválasztanunk. (ZH '99)
23. Egy társaságban bármely két embernek legalább két közös ismerőse van. Igaz továbbá, hogy bármely két ember vagy ismeri egymást, vagy a társaság bármely harmadik tagját legalább az egyikük ismeri. Bizonyítsuk be, hogy a társaság tagjai leültethetőek egy (megfelelő méretű) kerek asztal köré úgy, hogy mindenki két ismerőse között üljön. (✓) (ZH '00)
24. Igazoljuk, hogy ha egy egyszerű G gráfnak 20 csúcsa van és bármely fokszáma legalább 12, akkor G -nek van két olyan Hamilton köre, melyeknek nincs közös élé. (pZH '14)
25. 222 politikus mindegyike legalább 133 másikat ismer, akik közül legfeljebb 22-t utál. Az ismeretség és az utálat is kölcsönös. Bizonyítsuk be, hogy a 222 politikus úgy tudja élő láncsal körülvenni a Tüskecsarnokot, hogy a szomszédos láncszemek ismerjék, de ne utálják egymást. (ZH '15)
26. Legyen G 10 csúcsú, egyszerű gráf. Bizonyítsuk be, hogy G -nek nincs Hamilton-köre, ha a csúcsok fokszámai pedig rendre 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 9, 9, 9. (pZH '16)
Mutassuk meg, hogy G -nek van Hamilton-köre, ha a csúcsok fokszámai 3, 3, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 6.
27. A G egyszerű gráfnak $2n + 1$ csúcsa van és minden csúcsának legalább n a foka. Bizonyítsuk be, hogy G -ben van Hamilton-út! (!) (ZH '01)