A számítástudomány alapjai 2021. I. félév

3. gyakorlat. Összeállította: Fleiner Tamás (`fleiner@cs.bme.hu`)

Tudnivalók

Def: A H fa a G *feszítőfája*, ha H a G feszítő részgráfja (azaz $V(H) = V(G)$). A H feszítő részgráf akkor *feszítő erdő*, ha H erdő és G minden komponensének tartalmazza egy feszítőfáját.

Állítás: Tetsz. G gráfnak pontosan akkor van feszítőfája, ha G összefüggő.

Def: Ha $G = (V, E)$ egy gráf és $k : E \to \mathbb{R}$ az éleken értelmezett költségfüggvény, akkor G tetszőleges E' élhalmazának $k(E')$ *költsége* a E'-beli élek összköltsége. Az $F \subseteq E$ élhalmaz *minimális költségű feszítőfa (mkff)*, ha (V, F) a G feszítőfája, és nem drágább a G egyetlen feszítőfájánál sem, azaz $k(F) \le k(F')$ teljesül G minden (V, F') feszítőfájára.

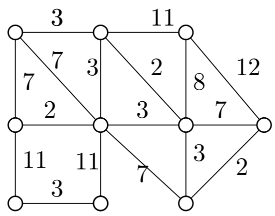
Tétel: Legyen $G = (V, E)$ egy gráf és $k : E \to \mathbb{R}$ egy tetsz. költségfüggvény, (V, F) pedig a G egy feszítőfája. F pontosan akkor mkff, ha minden c-re teljesül, hogy F tartalmazza a G legfeljebb c költségű élei alkotta gráf egy feszítő erdejét.

Kruskal (mohó) algoritmus: Input: $G = (V, E)$ összefüggő gráf és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfüggvény. Output: a G egy minimális költségű feszítőfájának F élhalmaza. Működés: Legyen $F_0 = \emptyset$, és $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, ahol $k(e_1) \le k(e_2) \le \ldots \le k(e_m)$. Az output $F = F_m$, ahol $i = 1, 2, \ldots, m$-re

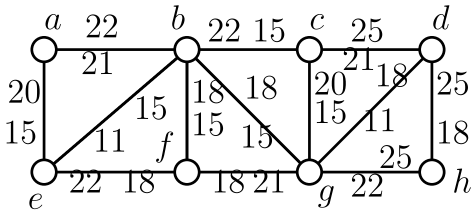
$$F_i := \begin{cases} F_{i-1} \cup \{e_i\} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ körmentes} \\ F_{i-1} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ tartalmaz kört.} \end{cases}$$

Tétel: A Kruskal-algoritmus által kiszámított F élhalmaz a G egy min költségű feszítőfája.

Gyakorlatok



1. Hány feszítőfája van annak a gráfnak, aminek csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ill. u_1, u_2 és élei az összes lehetséges $u_i v_j$ párok, ahol $1 \le i \le 2$ ill. $1 \le j \le n$?
2. Keressünk a jobb oldali ábrán látható gráfban minimális költségű feszítőfát! (✓) Hány minimális költségű feszítőfája van a gráfnak?
3. Adott egy négyzet négy csúcsa a síkon. Hogyan lehet a lehető legrövidebb összhosszúságú vonalak meghúzásával elérni, hogy a meghúzott vonalakat követve a négy csúcs bármelyikéből el lehessen jutni a másik három csúcsba? (!)
4. Adott a $G = (V, E)$ gráf és az élein egy $k : E \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvény. Tegyük fel, hogy ismerünk a $G - e$ gráfon egy minimális költségű F feszítőfát. Határozzuk meg a G gráfnak egy olyan minimális költségű feszítőfáját, aminek F-fel a lehető legtöbb közös éle van.



5. A jobb oldali ábrán látható $G = (V, E)$ gráf élei a felújítandó útszakaszokat jelentik. Minden élén két költség van: az olcsóbbik az egyszerű felújítás költsége, a drágább pedig ugyanez, kerékpárút építéssel. A cél az összes útszakasz felújítása úgy, hogy összefüggő kerékpárúthálózat épüljön ki, amin G minden pontja elérhető. Határozzunk meg egy legolcsóbb felújítási tervet, ami teljesíti ezt a feltételt. (ZH'15) (✓)
6. Abszurdisztán kormánya tendert ír ki n településnek a helyi vízműre történő rácsatlakoztatására. Minden ajánlat két helyszín (két település vagy egy település és a vízmű) között kiépítendő vezeték költségét tartalmazza. Tudjuk, hogy a kormány a lehető legolcsóbb módját választja annak, hogy az n település a vízműhöz csatlakozzon. Cégünk különféle homályos üzletek nyélbeütésével lényegében ingyen meg tudná építtetni a Rátót és Piripócs közti vezetéket. Ráadásul minisztériumi kapcsolatunk, Mutyi bácsi elárulta nekünk az összes beérkezett ajánlatot. Hogyan árazzuk a saját Rátót-Piripócs ajánlatunkat, hogy a lehető legnagyobbat szakítsuk?
7. Adott a $G = (V, E)$ gráf és az élein egy $k : E \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvény. Bizonyítsuk be, hogy G minden egyes minimális költségű F feszítőfája outputja lehet a Kruskal-algoritmusnak alkalmas (költség szerint monoton növekvő) élsorrend esetén.
8. Bizonyítsuk be, hogy ha a $G = (V, E)$ gráf minden élének különböző a költsége, akkor G minimális költségű feszítőfája egyértelmű.
9. Milyen k pozitív egészekre adható meg olyan 2000 élű és 2000 csúcsú összefüggő gráf, amire igaz a következő: G-ben a 2000 él közül adható egynek 2 egységnyi, 1999-nek 1 egységnyi súly úgy, hogy a G-ből kiválasztható különböző minimális súlyú feszítőfák száma éppen k legyen? (A feszítőfák megkülönböztetésekor a gráf csúcsait címkézettnek tekintjük.) (V '99)