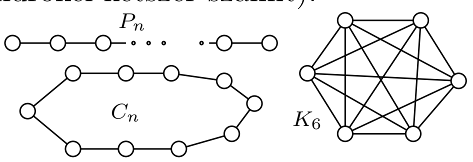
A számítástudomány alapjai 2021. I. félév

2. gyakorlat. Összeállította: Fleiner Tamás (`fleiner@cs.bme.hu`)

Tudnivalók

Def: $G = (V, E)$ *egyszerű gráf*, ha (1) $V \neq \emptyset$ és (2) $E \subseteq \binom{V}{2} := \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$
G gráf esetén $V(G)$ jelöli G *csúcsai*, $E(G)$ pedig G *élei* halmazát, azaz $G = (V(G), E(G))$. A $G = (V, E)$ gráf *véges*, ha V és E is véges halmazok.
Def: A G gráf egy *diagramja* egy olyan lerajzolása, melyben a csúcsoknak (síkbeli) pontok felelnek meg, éleknek pedig a két végpontot összekötő, önmagukat nem metsző görbék.
Def: Az $e = \{u, v\}$ élt $e = uv$-vel jelöljük; u és v az e él *végpontjai.* Az u és v csúcsok *szomszédosak*, ha e a gráf éle. Az e, f élek *párhuzamosak*, ha végpontjaik azonosak. A *hurokél* olyan él, melynek végpontjai azonosak. Nem feltétlenül egyszerű gráfban lehet hurok- és párhuzamos él is.
Def: A G gráf v csúcsának $d(v)$ *foka* a v végpontú élek száma (hurokél kétszer számít):
$d(v) := |\{e \in E : v \text{ az } e \text{ végpontja}\}| + |\{e \in E : e \text{ hurokél } v\text{-n}\}|$



Állítás: (HSL) Ha G véges gráf, akkor fokszámösszege $2|E(G)|$.
K_n az n-pontú *teljes gráf*: bármely két pontja össze van kötve.
Def: P_n az *n-pontú út*, C_n az *n-pontú kör* (ld. az ábrán)
G *reguláris*, ha fokszámai megegyeznek. $\Delta(G)$ ill. $\delta(G)$ G max ill. min fokszáma.
Def: A G egyszerű gráf *komplementere* a $\overline{G} := (V(G), \binom{V}{2} \setminus E(G))$ gráf. (Két csúcs pontosan akkor szomszédos $\overline{G}$-ben, ha nem szomszédos G-ben.) A G_1 és G_2 gráfok *izomorfak* ($G_1 \cong G_2$), ha G_1 és G_2 csúcsai is megszámozhatók 1-től n-ig úgy, hogy $\forall\, i, j$-re pontosan annyi él fut i-ből j-be G_1-ben, mint G_2-ben. (Különöböző csúcsok különöböző számot kapnak, és minden számot felhasználunk.)
Def: A G gráf *sétája* olyan $(v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_k)$ sorozat, melyre $e_i = v_i v_{i+1} \in E(G)$ $(\forall i)$ és $e_1, e_2, \ldots, e_{k-1}$ páronként különbözők. Ez a séta *körséta*, ha $v_1 = v_k$.
Def: Az *út* (ill. *kör*) olyan (kör)séta, aminek csúcsai (a végpontok azonosságától eltekintve) különbözők. Egyszerű gráfban az út (kör) azonosítható a hozzá tartozó pont- vagy élsorozattal.
Állítás: A G gráfban pontosan akkor létezik u és v között séta, ha létezik u és v között út.
Def: A G gráf *összefüggő (öf)*, ha bármely két pontja között vezet séta.
Def: $K \subseteq V(G)$ a G gráf *komponense*, ha bármely $u, v \in K$ között létezik G-séta, de nem létezik uv-séta ha $u \in K$, $v \in V(G) \setminus K$. **Köv.:** Minden gráf egyértelműen bontható komponensekre.
Élhozzáadási lemma: A $G + e$ gráfra az alábbiak közül pontosan egy igaz:
(1) e-n keresztül nincs kör, és $G + e$-nek eggyel kevesebb komponense van, mint G-nek,
(2) e-n keresztül van kör, és $G + e$-nek ugyanannyi komponense van, mint G-nek.
Def: Legyen $G = (V, E)$ gráf, $e \in E$, $v \in V$. Ekkor $G - e = (V, E \setminus \{e\})$ az *éltörlés* eredménye; a *csúcstörléssel* keletkező $G - v$ gráfhoz V-ből töröljük v-t, E-ből pedig a v-re illeszkedő éleket.
Def: A H gráf a G gráf *feszített/feszítő/jelzőnélküli részgráfja*, ha H megkapható G-ből csúcstörlésekkel/éltörlésekkel/csúcs- és éltörlésekkel.
Állítás: H a G-nek pontosan akkor (1) részgráfja (2) feszítő részgráfja (3) feszített részgráfja, ha (1) $V(H) \subseteq V(G)$ és $E(H) \subseteq E(G)$, (2) $V(H) = V(G)$ és $E(H) \subseteq E(G)$ ill. (3) $V(H) \subseteq V(G)$ és $E(H)$ az $E(G)$ azon éleiből áll, amelyek végpontjai $V(H)$-beliek.
Def: A G véges, egyszerű gráf *erdő*, ha G körmentes. A G gráf akkor *fa*, ha G összefüggő erdő.
Állítás: Ha az n csúcsú G erdőnek k komponense van, akkor éleinek száma $|E(G)| = n - k$.
Köv.: Ha F fa, akkor $|E(F)| = |V(F)| - 1$. **Köv.:** Ha egy G véges gráfra az alábbiak közül 2 teljesül, akkor igaz rá a harmadik is: (1) G összefüggő, (2) G körmentes, (3) $|V(G)| = |E(G)| - 1$.
Def: A G gráf v csúcsa *levél* (ill. *izolált pont*), ha $d(v)$=1 (ill. ha $d(v) = 0$).
Állítás: Tfh F fa. Ekkor (1) $(F - e)$-nek pontosan két komponense van $\forall e \in E(F)$-re. (2) F-nek pontosan egy uv-útja van $\forall u, v \in V(F)$-re. (3) $(F + e)$-nek pontosan egy köre van $\forall e \notin E(F)$-re. (4) Ha $|V(F)| \geq 2$, akkor F-nek legalább két levele van.
Def: F a G gráf *feszítőfája* (*ffája*), ha F egy G-ből éltörlésekkel kapható fa.
Állítás: (G-nek van feszítőfája) $\Longleftrightarrow$ (G öf.)

Gyakorlatok

1. Helyezzünk két világos és két sötét huszárt egy 3×3-as sakktábla négy sarkába úgy, hogy az azonos színű huszárok átellenes mezőkön álljanak. A huszárokkal a sakkban szokásos módon lépünk úgy, hogy sosem állhat egyszerre két figura ugyanazon a mezőn. Elérhető-e így, hogy a huszárok a tábla sarkaiban állnak, és az átellenes huszárok különböző színűek? (!)

2. Legyenek a G egyszerű gráf csúcsai az $1, 2, \ldots, 10$ számok, és két különböző csúcs között akkor fusson él, ha a két szám különbsége páratlan. Hány 4 hosszú köre van a G gráfnak? (ZH '14)
3. A G gráfnak $n+3$ csúcsa van: ebből 3 piros (a, b, c) és n zöld $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Két csúcs pontosan akkor szomszédos G-ben, ha a színük különbözik. Hány 6 pontú kör van a G gráfban?(ZH '16)
4. Tegyük fel, hogy a háromszöget nem tartalmazó, irányítatlan, 100 csúcsú G egyszerű gráf 4-reguláris, azaz minden fokszáma 4. Hány 3-élű útja van G-nek? (pZH '12)
5. Hány különböző egyszerű gráf adható meg az $\{1, 2, \ldots, n\}$ csúcshalmazon? (✓)
6. Határozzuk meg, mik a 2-reguláris gráfok. Hogy néznek ki azon G gráfok, amelyekre $\Delta(G) \leq 2$?
7. Határozzuk meg az összes olyan véges, egyszerű G gráfot, aminek nincs két azonos fokú csúcsa.
8. Mutassuk meg, hogy ha G véges gráf, akkor páratlan fokú pontjainak száma páros. (✓) Igazoljuk azt is, hogy ha G nem véges, akkor ez nem feltétlenül igaz.
9. Van-e olyan egyszerű gráf, aminek a fokszámai a.) $1, 2, 2, 3, 3, 3$ ill. b.) $1, 1, 2, 2, 3, 4, 4$? (✓)
10. Igazoljuk, hogy ha $u \in V(G)$ foka páratlan, akkor van olyan uv-út, amire $d(v)$ páratlan.(pZH '15)
11. Bizonyítsuk be, hogy bármely 13 ember között van olyan, aki legalább 6 másikat ismer vagy van köztük 3 olyan, akik páronként nem ismerik egymást. (Az ismeretség kölcsönös.)
12. Igazoljuk, hogy ha egy 6 csúcsú G gráf fokszámai $2, 2, 2, 4, 5, 5$, akkor G nem egyszerű. (pZH '14)
13. Tegyük fel, hogy G egyszerű gráf és n csúcsa van. Mutassuk meg, hogy ha $d(v) \geq \frac{n}{2}$ teljesül G-nek minden csúcsára, akkor G összefüggő. (✓)
14. Tegyük fel, hogy a G egyszerű gráfnak 100 csúcsa van, melyek bármelyikének a fokszáma legalább 33, továbbá G-nek van olyan csúcsa, melyből legalább 66 él indul. Bizonyítsuk be, hogy G összefüggő. (ZH '15)
15. A G egyszerű gráfnak $2k$ pontja van, minden pontjának foka legalább $k-1$, és G-nek létezik egy legalább k-adfokú pontja. Bizonyítsuk be, hogy G összefüggő.
16. Legyenek e, f és g a G egyszerű, összefüggő gráf különböző élei. Tegyük fel, hogy a G gráf összefüggő marad, bármely élét is hagyjuk el, ám a $G-e-f$ és a $G-e-g$ gráfok egyike sem összefüggő. Igazoljuk, hogy ekkor a $G-f-g$ gráf sem összefüggő.
17. Mutassuk meg, hogy bármely 11 csúcsú és 45 élű gráfnak van legalább 9-edfokú csúcsa. (✓)
18. Találjuk meg (izomorfia erejéig) mindazon egyszerű gráfokat, melyekre a) $n = 5, m = 2$ b) $n = 5, m = 3$ c) $n = 5, m = 7$ d) $n = 4, m = 5$ e) $n = 5, m = 8$ ahol n ill. m jelöli a gráf csúcsainak ill. éleinek számát. (✓)
19. Hogy néz ki az a lehető legkevesebb csúcsot tartalmazó egyszerű gráf, amelyben a legrövidebb kör hossza pontosan 4 és minden pont harmadfokú?
20. Mutassunk a komplementerével izomorf, 5- ill. 6-pontú gráfot!
21. Igazoljuk, hogy tetsz. egyszerű gráf élei irányíthatók úgy, hogy ne keletkezzen irányított kör.(!)
22. Ketten a következő játékot játsszák. Adott n pont, kezdetben semelyik kettő nincs összekötve. A játékosok felváltva lépnek, minden lépésben a soron következő játékos az n pont közül két tetszőlegesen választott közé behúz egy élet. Az veszít, aki kört hoz létre. A kezdő vagy a másodiknak lépő játékos nyer, ha mindketten a lehető legjobban játszanak? (V '00)
23. Igazoljuk, hogy minden fa megkapható egy csúcsból kiindulva úgy, hogy minden lépésben egy új levelet adunk az addig felépített gráfhoz. (!)
24. A G egyszerű gráfnak e egy olyan éle, aminek elhagyásával fát kapunk. Mutassuk meg, hogy G-nek még legalább két másik éle is rendelkezik ezzel a tulajdonsággal.
25. Ha T_1 és T_2 két fa ugyanazon a véges ponthalmazon, és e_1 a T_1 tetszőleges éle, akkor létezik T_2-nek egy e_2 éle, hogy $T_1 - e_1 + e_2$ és $T_2 - e_2 + e_1$ is fa.
26. Tegyük fel, hogy az F fának csak első-, másod- és harmadfokú csúcsai vannak, utóbbiból pontosan tíz darab. Határozzuk meg F leveleinek (azaz elsőfokú csúcsainak) a számát. (pZH '16)
27. Egy fának 8 csúcsa van, fokszámai pedig kétfélék. Mi lehet ez a két szám?
28. Hány pontja van annak a T fának, melyre $|E(\overline{T})| = 15 \cdot |E(T)|$? (✓)
29. Hány feszítőfája van a K_1, K_2, K_3, K_4 ill. K_5 gráfoknak? Mi lehet ez a szám K_n esetén?
30. Egy $n \times n$ méretű T táblázatnak nincs két egyforma sora. Bizonyítsuk be, hogy T-nek van olyan oszlopa, amelynek törlése után a kaptott táblázatban továbbra sincs két egyforma sor.(*)
31. Mutassuk meg, hogy ha a T téglalapot sikerült olyan téglalapokkal kiparkettázni, amelyek mindegyikének van egész hosszúságú oldala, akkor T-nek is van egész hosszúságú oldala. (*)