

A számítástudomány alapjai 2021. I. félév

10. gyakorlat. Összeállította: Fleiner Tamás (fleiner@cs.bme.hu)

Tudnivalók

Def: A G gráf *síkbarajzolható* (SRható), ha létezik G -nek olyan diagramja, amiben az éleknek megfelelő görbék (töröttvonalak) csak végpontokban metszhetik egymást. Az ilyen tulajdonságú diagramot *síkbarajzolt* (SRt) gráfnak hívjuk. A síkbarajzolt gráf a síkot *tartományokra* (lapokra) osztja. Lesz egy végtelen tartomány, az ún. *külső* tartomány. Gömbre rajzoláson lényegében ugyanezt értjük, csak sík helyett a gömb felszínén dolgozunk, külső tartomány nincs.

Tétel: A G gráf pontosan akkor síkbarajzolható, ha gömbre rajzolható.

Köv.: Tetszőleges konvex poliéder élhálója síkbarajzolható.

Hasznos összefüggés (duális HSL): Ha egy G síkbarajzolt gráfnak e éle van, és az egyes tartományait l_1, l_2, \dots, l_t él határolja, akkor $2e = \sum_{i=1}^t l_i$. (Multiplicitással számolunk: Ha egy uv él mindkét oldalán ugyanaz a t_i tartomány fekszik, akkor uv -t kétszer számoljuk l_i -be.)

Tétel: Ha G sr, n csúcsa, e éle, k komponense és t tartománya van, akkor $n + t = e + k + 1$.

Köv.: (1) Ha G sr, akkor bármely síkbarajzolásának ugyanannyi tartománya van.

(2) **(Euler-formula)** Ha egy öf sr gráfnak n pontja, e éle és t tartománya van, akkor $n + t = e + 2$.

(3) Ha G egyszerű, legalább 3-pontú, sr gráf, akkor $e \leq 3n - 6$.

(4) Ha G -nek háromszöglapja sincs, akkor még $e \leq 2n - 4$ is igaz.

(5) Ha G sr és egyszerű, akkor van legfeljebb 5-ödfokú csúcsa, azaz $\delta(G) \leq 5$.

(6) Sem K_5 , sem $K_{3,3}$ nem síkbarajzolható. ($K_{3,3}$ a „három ház, három kút” gráf.)

Def: *Élfelosztás* alatt azt értjük, hogy egy él törölünk, és bevezetünk egy másodfokú új csúcsot, aminek két szomszédja a törölt él két végpontja. A G gráf *soros bővítése* olyan gráf, ami G -ből élfelosztások egymásutánjával kapható. A G és H gráfok *topologikusan izomorfak*, ha van egymással izomorf soros bővítésük. Él összehúzása az él két végpontjának összeolvasztását jelenti.

Állítás: Csúcs és él törlése, él felosztása és él összehúzása megőrzi SRható tulajdonságot.

Köv.: SRható gráf minden részgráfja SRható. SRható gráf részgráfja nem lehet se K_5 , se $K_{3,3}$ soros bővítése.

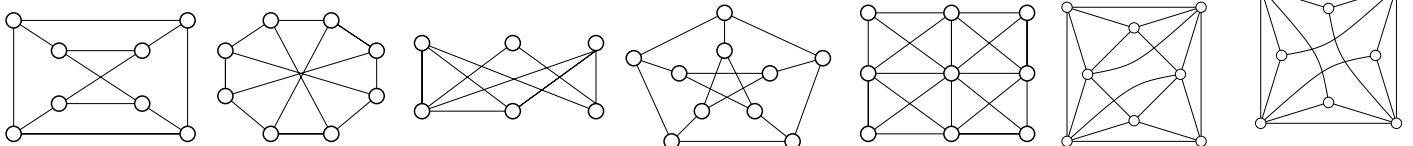
Kuratowski tétel: A G gráf pontosan akkor sr, ha G nem tartalmaz részgráfként se $K_{3,3}$, se K_5 soros bővítését.

Fáry-Wagner tétel: Ha G egyszerű és sr gráf, akkor létezik G -nek olyan síkbarajzolt diagramja, amiben minden él egyenes szakasz.

Ötszintétel: Ha G egyszerű és SRható, akkor $\chi(G) \leq 5$. **Négyzintétel:** Ugyanez, 4-gyel.

Gyakorlatok

- Hány csúcsa van egy olyan öf síkbarajzolható gráfnak, aminek három háromszöglapja, három négyszöglapja és egy ötszöglapja van? (✓)
- Egy 20-csúcsú poliédernek 12 lapja van, mindegyik k oldalú sokszög. Mennyi a k értéke? (✓)
- Egy konvex test minden lapja négyszög vagy nyolcszög és minden pontban pontosan három lap találkozik. Mennyi a négyszög- és nyolcszöglapok számának különbsége?
- Legyenek $v_2, v_3, \dots, v_7, v_8$ a G gráf csúcsai, és pontosan akkor legyen v_i és v_j között él, ha $i^2 - 1$ -nek és $j^2 - 1$ -nek van 1-nél nagyobb közös osztója. Rajzoljuk le G egy áttekinthető diagramját, valamint döntsük el, hogy G síkbarajzolható-e. (✓) (ppZH '12)
- Síkbarajzolhatók-e a $K_6, K_{4,2}, K_{4,3}, K_5 - e, K_{3,3} - e$ gráfok? Hát az alábbiak?



- Van-e olyan 9-pontú G gráf, hogy sem G sem a \overline{G} komplementere nem síkbarajzolható? (V '01)
- Van-e olyan 8-pontú G gráf, hogy mind G , mind pedig a \overline{G} komplementergráf síkbarajzolható?
- Igazoljuk, hogy ha egy egyszerű G gráfnak legalább 11 csúcsa van, akkor G és \overline{G} közül legalább az egyik nem síkbarajzolható.

9. Tegyük fel, hogy G olyan összefüggő, síkbarajzolt gráf, amelynek 14 tartománya van, minden csúcsának fokszáma 3 vagy 6, és a harmadfokú csúcsok száma kétszerese a hatodfokúakénak. Hány csúcsa és hány éle van G -nek?
10. Bizonyítsuk be, hogy ha egy egyszerű G gráf síkbarajzolható, akkor a pontjainak legfeljebb a fele lehet 10-nél nagyobb fokú. (pZH '14)
11. Abszurdisztán adóhivatala egy papírfecnin szerzett értesülés nyomán szeretne felderíteni bizonyos ÁFA-csalásokat. A szövevényes bűnügy felgöngyölítéséhez elkészítettek egy G gráfot, melynek pontjai a gyanús cégeknek felelnek meg és G két csúcsa között akkor fut él, ha a két szóban forgó cég egyike számlát állított ki a másiknak. Az adatok gondos analízise nyomán az derült ki, hogy minden gyanús cégnek legalább hat másik gyanús céggel volt már közös számlázási ügye. A nyomozás sikerének pedig az a kulcsa, hogy ez a G gráf átlátható legyen, azaz, hogy G -t úgy lehessen lerajzolni egy dátummal, pecséttel és aláírással ellátott okmányra, hogy élek belső pontban ne keresztezzék egymást. (Ha ugyanis eredménytelen marad a próbálkozás, akkor sajnos képtelenség felderíteni az csalásokat.) Sikerül-e vajon nyakon csípni az elvetemült bűnözőket? (ZH '14)
12. Egy mezőn k ház és k kút áll. Minden háztól pontosan 4 (különböző) kúthoz vezet út (még hozzá közvetlenül, vagyis más házak vagy kutak érintése nélkül). Mutassuk meg, hogy biztosan van két olyan út, amelyek keresztezik egymást!
13. Bizonyítsuk be, hogy nem létezik 5 olyan ország, amik páronként szomszédosak!
14. A $K_{5,5}$ gráfot úgy rajzoltuk le a síkra, hogy az élek töröttvonalak, és egy ponton legfeljebb két él metszi egymást. Bizonyítsuk be, hogy ekkor legalább 9 élmetszéspont keletkezik. Mutassuk meg, hogy K_{10} lerajzolásakor legalább 42 élmetszéspontot kapunk. (!*)
15. Mutassuk meg, hogy ha a G síkbarajzolt gráf minden lapját páros számú él határolja, akkor G páros gráf.
16. Legfeljebb hány éle és hány tartománya lehet egy olyan egyszerű, n pontú, sr G gráfnak, aminek van olyan lapja, ami G minden csúcsát tartalmazza a határán?
17. Ha G $n \geq 3$ pontú, egyszerű, síkbarajzolható gráf, akkor
 - (a) G egyúttal tóruszra is rajzolható;
 - (b) ha G -nek $3n - 6$ -nál kevesebb éle van, akkor behúzható G -be új él úgy, hogy továbbra is egyszerű, síkbarajzolható gráfot kapjunk;
 - (c) G -nek van legfeljebb harmadfokú csúcsa vagy G tetszőleges síkbarajzolásának van háromszöglapja. (ZH '01)
18. Mutassuk meg, hogy a K_5 , K_6 , K_7 és a $K_{3,3}$ gráfok mindegyike tóruszra (úszógumira) rajzolható. Bizonyítsuk be, hogy ha a G gráf síkbarajzolható, és G -be behúzzunk egy e élt, akkor a kapott $G + e$ gráf tóruszra rajzolható.
19. Igazoljuk, hogy ha G olyan összefüggő, síkbarajzolt gráf, amelyben minden fokszám páros, akkor G tartományai kiszínezhetők sakktáblaszerűen két színnel úgy, hogy az élben szomszédos tartományok színe egymástól különböző legyen. (!)