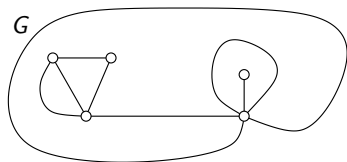


A számítástudomány alapjai

Síkgráfok dualitása

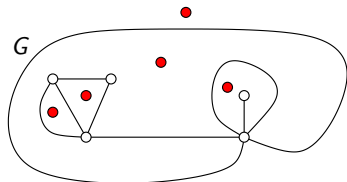
2021. december 7.

Síkgráfok duálisa



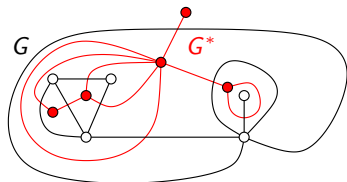
Def: A G síkbarajzolt gráf **duálisa** az a G^* gráf, aminek csúcsai a G tartományai

Síkgráfok duálisa



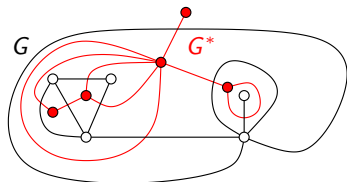
Def: A G síkbarajzolt gráf **duálisa** az a G^* gráf, aminek csúcsai a G tartományai

Síkgráfok duálisa



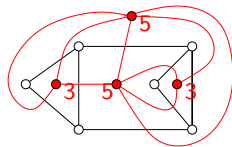
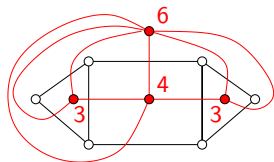
Def: A G síkbarajzolt gráf **duálisa** az a G^* gráf, aminek csúcsai a G tartományai, élei pedig G éleinek felelnek meg, és az adott élt által elválasztott tartományoknak megfelelő csúcsokat köti össze.

Síkgráfok duálisa

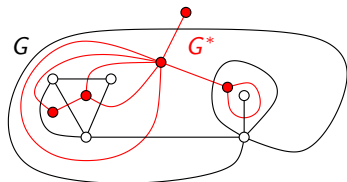


Def: A G síkbarajzolt gráf **duálisa** az a G^* gráf, aminek csúcsai a G tartományai, élei pedig G éleinek felelnek meg, és az adott élt által elválasztott tartományoknak megfelelő csúcsokat köti össze.

Csak síkbarajzolt gráfnak van duálisa. Síkbarajzolható gráfnak a konkrét lerajzolástól függően többféle duálisa is lehet.

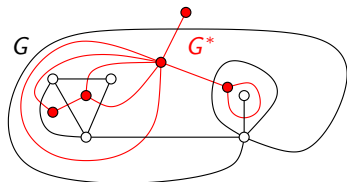


Síkgráfok duálisa



Def: A G síkbarajzolt gráf **duálisa** az a G^* gráf, aminek csúcsai a G tartományai, élei pedig G éleinek felelnek meg, és az adott élt által elválasztott tartományoknak megfelelő csúcsokat köti össze.

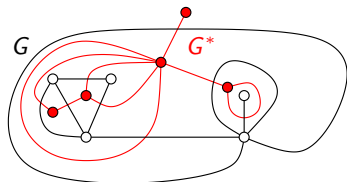
Síkgráfok duálisa



Def: A G síkbarajzolt gráf **duálisa** az a G^* gráf, aminek csúcsai a G tartományai, élei pedig G éleinek felelnek meg, és az adott élt által elválasztott tartományoknak megfelelő csúcsokat köti össze.

Megf: (1) A G^* duális gráf SRható, $n^* = t$, $e^* = e$ és $k^* = 1$.

Síkgráfok duálisa

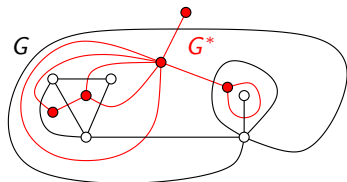


Def: A G síkbarajzolt gráf **duálisa** az a G^* gráf, aminek csúcsai a G tartományai, élei pedig G éleinek felelnek meg, és az adott élt által elválasztott tartományoknak megfelelő csúcsokat köti össze.

Megf: (1) A G^* duális gráf SRható, $n^* = t$, $e^* = e$ és $k^* = 1$.

(2) Ha $v^* \in V(G^*)$ a G i -dik lapjához tartozik, akkor $d(v^*) = \ell_i$.

Síkgráfok duálisa



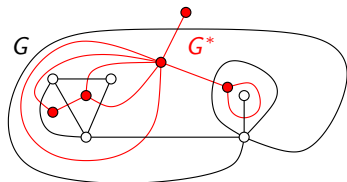
Def: A G síkbarajzolt gráf **duálisa** az a G^* gráf, aminek csúcsai a G tartományai, élei pedig G éleinek felelnek meg, és az adott élt által elválasztott tartományoknak megfelelő csúcsokat köti össze.

Megf: (1) A G^* duális gráf SRható, $n^* = t$, $e^* = e$ és $k^* = 1$.

(2) Ha $v^* \in V(G^*)$ a G i -dik lapjához tartozik, akkor $d(v^*) = \ell_i$.

(3) HSL G^* -ra:
$$\sum d(v^*) = 2e^*$$

Síkgráfok duálisa



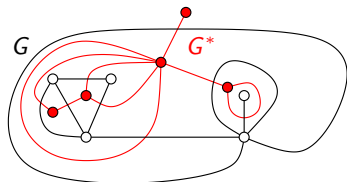
Def: A G síkbarajzolt gráf **duálisa** az a G^* gráf, aminek csúcsai a G tartományai, élei pedig G éleinek felelnek meg, és az adott élt által elválasztott tartományoknak megfelelő csúcsokat köti össze.

Megf: (1) A G^* duális gráf SRható, $n^* = t$, $e^* = e$ és $k^* = 1$.

(2) Ha $v^* \in V(G^*)$ a G i -dik lapjához tartozik, akkor $d(v^*) = \ell_i$.

(3) HSL G^* -ra: $\sum \ell_i = \sum d(v^*) = 2e^* = 2e$ (DHSL)

Síkgráfok duálisa



Def: A G síkbarajzolt gráf **duálisa** az a G^* gráf, aminek csúcsai a G tartományai, élei pedig G éleinek felelnek meg, és az adott élt által elválasztott tartományoknak megfelelő csúcsokat köti össze.

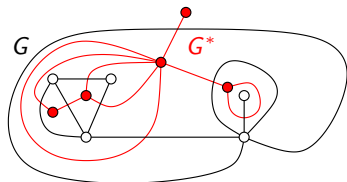
Megf: (1) A G^* duális gráf SRható, $n^* = t$, $e^* = e$ és $k^* = 1$.

(2) Ha $v^* \in V(G^*)$ a G i -dik lapjához tartozik, akkor $d(v^*) = l_i$.

(3) HSL G^* -ra: $\sum l_i = \sum d(v^*) = 2e^* = 2e$ (DHSL)

(4) G^* csúcsszínezése G lapjai színezésének felel meg. (ld. 4CT)

Síkgráfok duálisa



Def: A G síkbarajzolt gráf **duálisa** az a G^* gráf, aminek csúcsai a G tartományai, élei pedig G éleinek felelnek meg, és az adott élt által elválasztott tartományoknak megfelelő csúcsokat köti össze.

Megf: (1) A G^* duális gráf SRható, $n^* = t$, $e^* = e$ és $k^* = 1$.

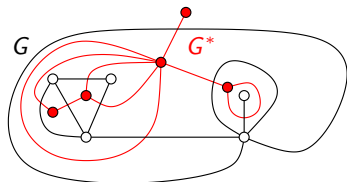
(2) Ha $v^* \in V(G^*)$ a G i -dik lapjához tartozik, akkor $d(v^*) = l_i$.

(3) HSL G^* -ra: $\sum l_i = \sum d(v^*) = 2e^* = 2e$ (DHSL)

(4) G^* csúcsszínezése G lapjai színezésének felel meg. (ld. 4CT)

(5) Ha G öf, akkor $t^* = n$, sőt: $G = (G^*)^*$.

Síkgráfok duálisa



Def: A G síkbarajzolt gráf **duálisa** az a G^* gráf, aminek csúcsai a G tartományai, élei pedig G éleinek felelnek meg, és az adott élt által elválasztott tartományoknak megfelelő csúcsokat köti össze.

Megf: (1) A G^* duális gráf SRható, $n^* = t$, $e^* = e$ és $k^* = 1$.

(2) Ha $v^* \in V(G^*)$ a G i -dik lapjához tartozik, akkor $d(v^*) = l_i$.

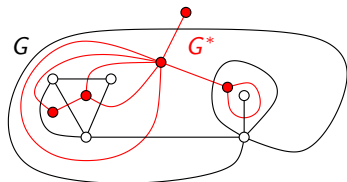
(3) HSL G^* -ra: $\sum l_i = \sum d(v^*) = 2e^* = 2e$ (DHSL)

(4) G^* csúcsszínezése G lapjai színezésének felel meg. (ld. 4CT)

(5) Ha G öf, akkor $t^* = n$, sőt: $G = (G^*)^*$.

U.i. $n + t = e + k + 1 = e^* + k^* + 1 = n^* + t^* = t + t^*$.

Síkgráfok duálisa



Def: A G síkbarajzolt gráf **duálisa** az a G^* gráf, aminek csúcsai a G tartományai, élei pedig G éleinek felelnek meg, és az adott élt által elválasztott tartományoknak megfelelő csúcsokat köti össze.

Megf: (1) A G^* duális gráf SRható, $n^* = t$, $e^* = e$ és $k^* = 1$.

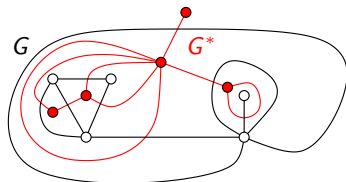
(2) Ha $v^* \in V(G^*)$ a G i -dik lapjához tartozik, akkor $d(v^*) = l_i$.

(3) HSL G^* -ra: $\sum l_i = \sum d(v^*) = 2e^* = 2e$ (DHSL)

(4) G^* csúcsszínezése G lapjai színezésének felel meg. (ld. 4CT)

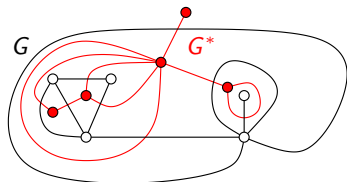
(5) Ha G öf, akkor $t^* = n$, sőt: $G = (G^*)^*$.

Síkgráfok duálisa



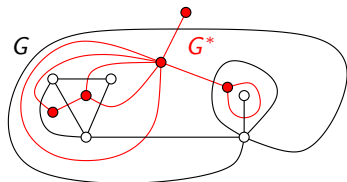
Def: A G síkbarajzolt gráf **duálisa** az a G^* gráf, aminek csúcsai a G tartományai, élei pedig G élének felelnek meg, és az adott élt által elválasztott tartományoknak megfelelő csúcsokat köti össze.
(6) Hurokél és elvágó él egymás duálisai.

Síkgráfok duálisa



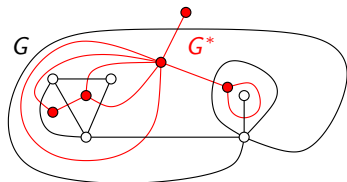
Def: A G síkbarajzolt gráf **duálisa** az a G^* gráf, aminek csúcsai a G tartományai, élei pedig G élének felelnek meg, és az adott élt által elválasztott tartományoknak megfelelő csúcsokat köti össze.
(6) Hurokél és elvágó él egymás duálisai. De ennél több is igaz.

Síkgráfok duálisa



Def: A G síkbarajzolt gráf **duálisa** az a G^* gráf, aminek csúcsai a G tartományai, élei pedig G éleinek felelnek meg, és az adott élt által elválasztott tartományoknak megfelelő csúcsokat köti össze.

Síkgráfok duálisa

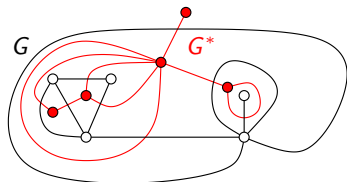


Def: A G síkbarajzolt gráf **duálisa** az a G^* gráf, aminek csúcsai a G tartományai, élei pedig G éleinek felelnek meg, és az adott élt által elválasztott tartományoknak megfelelő csúcsokat köti össze.

Def: A G gráf Q élhalmaza **vágás**, ha $G - Q$ szétesik (azaz több komponense van, mint G -nek), de $G - Q'$ nem esik szét semmilyen $Q \neq Q' \subset Q$ esetén.



Síkgráfok duálisa

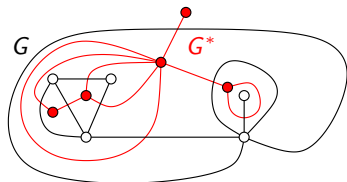


Def: A G síkbarajzolt gráf **duálisa** az a G^* gráf, aminek csúcsai a G tartományai, élei pedig G éleinek felelnek meg, és az adott élt által elválasztott tartományoknak megfelelő csúcsokat köti össze.

Def: A G gráf Q élhalmaza **vágás**, ha $G - Q$ szétesik (azaz több komponense van, mint G -nek), de $G - Q'$ nem esik szét semmilyen $Q \neq Q' \subset Q$ esetén.

Megf: e elvágó él $\iff \{e\}$ vágás.

Síkgráfok duálisa

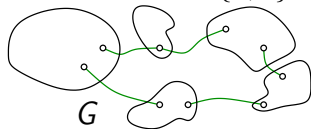


Def: A G síkbarajzolt gráf **duálisa** az a G^* gráf, aminek csúcsai a G tartományai, élei pedig G éleinek felelnek meg, és az adott élt által elválasztott tartományoknak megfelelő csúcsokat köti össze.

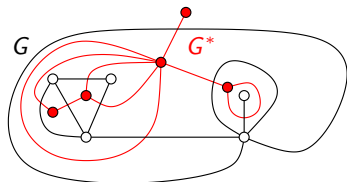
Def: A G gráf Q élhalmaza **vágás**, ha $G - Q$ szétesik (azaz több komponense van, mint G -nek), de $G - Q'$ nem esik szét semmilyen $Q \neq Q' \subset Q$ esetén.

Megf: e elvágó él $\iff \{e\}$ vágás.

Def: Az e és f **soros élek**, ha $\{e, f\}$ vágás.



Síkgráfok duálisa



Def: A G síkbarajzolt gráf **duálisa** az a G^* gráf, aminek csúcsai a G tartományai, élei pedig G éleinek felelnek meg, és az adott élt által elválasztott tartományoknak megfelelő csúcsokat köti össze.

Def: A G gráf Q élhalmaza **vágás**, ha $G - Q$ szétesik (azaz több komponense van, mint G -nek), de $G - Q'$ nem esik szét semmilyen $Q \neq Q' \subset Q$ esetén.

Megf: e elvágó él $\iff \{e\}$ vágás.

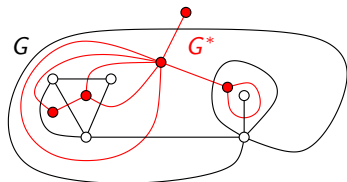
Def: Az e és f **soros élek**, ha $\{e, f\}$ vágás.

Megf: (Kör-vágás dualitás) Ha G^* a G SRt gráf duálisa, akkor

(1) $C \subseteq E(G)$ kör G -ben $\iff C^*$ vágás G^* -ban.

(2) $Q \subseteq E(G)$ vágás G -ben $\iff Q^*$ kör G^* -ban.

Síkgráfok duálisa



Def: A G síkbarajzolt gráf **duálisa** az a G^* gráf, aminek csúcsai a G tartományai, élei pedig G éleinek felelnek meg, és az adott élt által elválasztott tartományoknak megfelelő csúcsokat köti össze.

Def: A G gráf Q élhalmaza **vágás**, ha $G - Q$ szétesik (azaz több komponense van, mint G -nek), de $G - Q'$ nem esik szét semmilyen $Q \neq Q' \subset Q$ esetén.

Megf: e elvágó él $\iff \{e\}$ vágás.

Def: Az e és f **soros élek**, ha $\{e, f\}$ vágás.

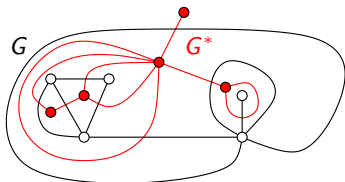
Megf: (Kör-vágás dualitás) Ha G^* a G SRt gráf duálisa, akkor

(1) $C \subseteq E(G)$ kör G -ben $\iff C^*$ vágás G^* -ban.

(2) $Q \subseteq E(G)$ vágás G -ben $\iff Q^*$ kör G^* -ban.

Köv: (1) Hurokél és elvágó él egymás duálisai.

Síkgráfok duálisa



Def: A G síkbarajzolt gráf **duálisa** az a G^* gráf, aminek csúcsai a G tartományai, élei pedig G éleinek felelnek meg, és az adott élt által elválasztott tartományoknak megfelelő csúcsokat köti össze.

Def: A G gráf Q élhalmaza **vágás**, ha $G - Q$ szétesik (azaz több komponense van, mint G -nek), de $G - Q'$ nem esik szét semmilyen $Q \neq Q' \subset Q$ esetén.

Megf: e elvágó él $\iff \{e\}$ vágás.

Def: Az e és f **soros élek**, ha $\{e, f\}$ vágás.

Megf: (Kör-vágás dualitás) Ha G^* a G SRt gráf duálisa, akkor

(1) $C \subseteq E(G)$ kör G -ben $\iff C^*$ vágás G^* -ban.

(2) $Q \subseteq E(G)$ vágás G -ben $\iff Q^*$ kör G^* -ban.

Köv: (1) Hurokél és elvágó él egymás duálisai.

(2) Soros és párhuzamos élek egymás duálisai.

Duálisok kapcsolata

Láttuk, hogy ugyanannak a SRható gráfnak többféle duálisa is lehet. Mi a kapcsolat a lehetséges duálisok között?

Duálisok kapcsolata

Láttuk, hogy ugyanannak a SRható gráfnak többféle duálisa is lehet. Mi a kapcsolat a lehetséges duálisok között?

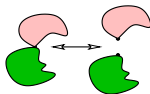
Whitney tétele: Tfh G^* a G SRt gráf duálisa. Ekkor H pontosan akkor duálisa G egy síkbarajzolásának, ha H öf és megkapható G^* -ból az alábbi operációk véges sokszori alkalmazásával.

Duálisok kapcsolata

Láttuk, hogy ugyanannak a SRható gráfnak többféle duálisa is lehet. Mi a kapcsolat a lehetséges duálisok között?

Whitney tétele: Tfh G^* a G SRt gráf duálisa. Ekkor H pontosan akkor duálisa G egy síkbarajzolásának, ha H öf és megkapható G^* -ból az alábbi operációk véges sokszori alkalmazásával.

1. Elvágó pont mentén szétszedés/komponensek összeragasztása.

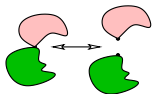


Duálisok kapcsolata

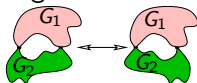
Láttuk, hogy ugyanannak a SRható gráfnak többféle duálisa is lehet. Mi a kapcsolat a lehetséges duálisok között?

Whitney tétele: Tfh G^* a G SRt gráf duálisa. Ekkor H pontosan akkor duálisa G egy síkbarajzolásának, ha H öf és megkapható G^* -ból az alábbi operációk véges sokszori alkalmazásával.

1. Elvágó pont mentén szétszedés/komponensek összeragasztása.



2. Két csúcs mentén szétvágás, majd fordítva visszazaragasztás.

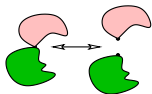


Duálisok kapcsolata

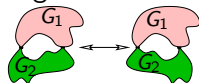
Láttuk, hogy ugyanannak a SRható gráfnak többféle duálisa is lehet. Mi a kapcsolat a lehetséges duálisok között?

Whitney tétele: Tfh G^* a G SRt gráf duálisa. Ekkor H pontosan akkor duálisa G egy síkbarajzolásának, ha H öf és megkapható G^* -ból az alábbi operációk véges sokszori alkalmazásával.

1. Elvágó pont mentén szétszedés/komponensek összeragasztása.



2. Két csúcs mentén szétvágás, majd fordítva visszazagasztás.



Whitney másik tétele: Tfh a G és H öf gráfok között kör-vágás dualitást tudunk létesíteni egy, az élek közötti alkalmas kölcsönösen egyértelmű megfeleltetéssel. Ekkor G és H is síkbarajzolható, és alkalmas síkbarajzásaik egymás duálisai. □

Dualitás a villamosságban

Kétpólusú elemekből álló elektromos hálózatok viselkedését a Kirchhoff-féle csomóponti és huroktörvények, valamint az Ohm törvények írják le. Ezekből lehet kiszámítani a hálózat gráfjának élein az áramerősséget ill. az élvégpontok közti feszültséget.

Dualitás a villamosságban

Kétpólusú elemekből álló elektromos hálózatok viselkedését a Kirchhoff-féle csomóponti és huroktörvények, valamint az Ohm törvények írják le. Ezekből lehet kiszámítani a hálózat gráfjának élein az áramerősséget ill. az élvégpontok közti feszültséget. A csomóponti törvényeket a gráf vágásaira, a huroktörvényeket pedig a gráf köreire értelmes felírni.

Dualitás a villamosságban

Kétpólusú elemekből álló elektromos hálózatok viselkedését a Kirchhoff-féle csomóponti és huroktörvények, valamint az Ohm törvények írják le. Ezekből lehet kiszámítani a hálózat gráfjának élein az áramerősséget ill. az élvégpontok közti feszültséget.

A csomóponti törvényeket a gráf vágásaira, a huroktörvényeket pedig a gráf köreire értelmes felírni.

A korábban tanult Kruskal-algoritmus alkalmazásával (a normál fa segítségével) azt tudtuk meghatározni, hogy egyértelműen oldható-e meg a hálózat, ill. meg tudunk határozni minimális számú Kirchhoff-törvényből adódó feltételt, amelyek már egyértelműen meghatározzák a megoldást.

Dualitás a villamosságban

Kétpólusú elemekből álló elektromos hálózatok viselkedését a Kirchhoff-féle csomóponti és huroktörvények, valamint az Ohm törvények írják le. Ezekből lehet kiszámítani a hálózat gráfjának élein az áramerősséget ill. az élvégpontok közti feszültséget. A csomóponti törvényeket a gráf vágásaira, a huroktörvényeket pedig a gráf köreire értelmes felírni.

Dualitás a villamosságban

Kétpólusú elemekből álló elektromos hálózatok viselkedését a Kirchhoff-féle csomóponti és huroktörvények, valamint az Ohm törvények írják le. Ezekből lehet kiszámítani a hálózat gráfjának élein az áramerősséget ill. az élvégpontok közti feszültséget.

A csomóponti törvényeket a gráf vágásaira, a huroktörvényeket pedig a gráf köreire értelmes felírni.

A kétféle Kirchhoff-törvény hasonló formájú: mindkettőben bizonyos éleken az (I -k vagy ΔU -k) összege 0. Lehetséges vajon egy H hálózathoz olyan, duális H^* hálózatot konstruálni, aminek ugyanannyi éle van, és a H^* megoldása ugyanaz, mint a H -é, csak az áramerősségekből potenciálkülönbségek, a potenciálkülönbségekből pedig áramerősségek lesznek?

Dualitás a villamosságban

A kétféle Kirchoff-törvény hasonló formájú: mindkettőben bizonyos éleken az (I -k vagy ΔU -k) összege 0. Lehetséges vajon egy H hálózathoz olyan, duális H^* hálózatot konstruálni, aminek ugyanannyi éle van, és a H^* megoldása ugyanaz, mint a H -é, csak az áramerősségekből potenciálkülönbségek, a potenciálkülönbségekből pedig áramerősségek lesznek?

Dualitás a villamosságban

A kétféle Kirchoff-törvény hasonló formájú: mindkettőben bizonyos éleken az (I -k vagy ΔU -k) összege 0. Lehetséges vajon egy H hálózathoz olyan, duális H^* hálózatot konstruálni, aminek ugyanannyi éle van, és a H^* megoldása ugyanaz, mint a H -é, csak az áramerősségekből potenciálkülönbségek, a potenciálkülönbségekből pedig áramerősségek lesznek? Ehhez az szükséges, hogy a két hálózat élei között olyan kölcs. egyért. megfeleltetés legyen, amire teljesül a kör-vágás dualitás. Whitney „másik” tétele szerint ez pontosan akkor lehetséges, ha a hálózathoz tartozó gráf síkbarajzolható. Ilyenkor a dualitás úgy valósítható meg, hogy az R nagyságú ellenállás duálisa egy $1/R$ nagyságú ellenállás, az x nagyságú áramforrásé egy x nagyságú feszültségforrás (és viszont), az y nagyságú kapacitásé pedig egy y nagyságú induktivitás (és viszont). Ha azonban a hálózathoz tartozó gráf nem síkbarajzolható, akkor nincs hozzá a fenti értelemben duális hálózat.

Dualitás a villamosságban

Dualitás a villamosságban

Whitney „egyik” tételének is van ám villamosságban
következménye. Nevezetesen, egy összefüggő hálózatból a kétféle
operáció segítségével egy másik összefüggő hálózatot készítünk,
akkor az így kapott két hálózatnak pontosan ugyanaz lesz a
megoldása. (Whitney tételéből egyébként az is következik, hogy ha
két hálózatnak ugyanaz a megoldása, akkor az egyik megkapható a
másikból a kétféle operáció véges sokszori alkalmazásával.)

Köszönöm a figyelmet!