A Számítástudomány alapjai

1. ZH javítókulcs (2020. 11. 05.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Hányféleképp lehet sorba rendezni az OSZLOPALKAT szóban található 11 betűt úgy, hogy a sorrend ne a LAKATOS szóval kezdődjön? (Az azonos betűket nem különböztetjük meg.)

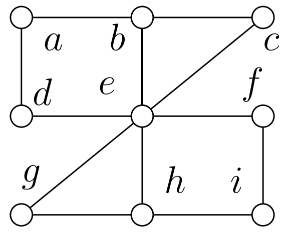
   Ha nincs kikötés a sorozat kezdetére, akkor ismétléses permutációkat kell számolni: 11 elemből 3 elem kétszer jelenik meg, ezért a lehetséges sorbarendezések száma a tanultak szerint $\frac{11!}{2!^3}$. (4 pont)
   Ezzel leszámoltuk a LAKATOS kezdetű sorozatokat is. Ezek számát úgy kapjuk, hogy a maradék 4 betűt (Z, L, O, P) tetszőlegesen sorba rakjuk a LAKATOS kezdés után. Ezt az említett 4 elem permutációja, tehát 4! van belőlük. (3 pont)
   A válasz tehát a két fenti mennyiség különbsége, (2 pont)
   azaz $\frac{11!}{2!^3} - 4!$. (1 pont)

2. A G irányítatlan gráfnak nyolc csúcsa van: a, b, c, d, e, f, g, h. Ezek fokszámai rendre 6, 4, 4, 2, 2, 2, 1, 1. A G éleinek egy alkalmas irányításával létrejövő G' irányított gráfban a fenti csúcsokból rendre $D, 3, 1, 1, 2, 1, 0, 0$ él lép ki. Határozzuk meg D értékét!

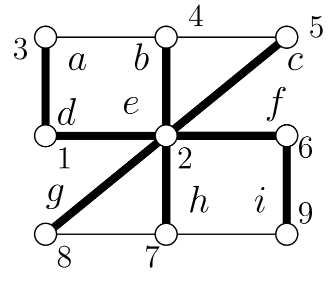
   A G gráfban a fokszámösszeg 22, ezért G-nek a HSL miatt pontosan 11 éle van. (4 pont)
   Ha egy irányított gráfban összeadjuk az egyes csúcsokból kilépő élek számát, akkor (a HSL irányított változata miatt) épp a gráf éleinek számát kapjuk. (2 pont)
   Mivel G'-nek is 11 éle van, (1 pont)
   ezért $11 = D + 3 + 1 + 1 + 2 + 1 + 0 + 0$, (2 pont)
   ahonnan $D = 3$ a feladat kérdésére a válasz. (1 pont)

3. Hány csúcsa van az F fának, ha F-nek pontosan két nyolcadadfokú és tizenhárom negyedfokú csúcsa van, és F minden más csúcsa levél?

   Jelölje ℓ az F leveleinek számát! Ekkor F csúcsai száma $|V(F)| = 2 + 13 + \ell = 15 + \ell$, (1 pont)
   F élei száma pedig az órán tanultak szerint ennél 1-gyel kevesebb, azaz $|E(F)| = 14 + \ell$. (2 pont)
   A HSL miatt a fokszámösszeg az élszám kétszerse, azaz $1 \cdot \ell + 4 \cdot 13 + 8 \cdot 2 = 2 \cdot (14 + \ell)$, (4 pont)
   ahonnan $\ell + 68 = 28 + 2\ell$ alapján $\ell = 40$ adódik. (2 pont)
   Innen F csúcsainak száma $|V(F)| = 15 + \ell = 15 + 40 = 55$, és ez a válasz a feladatbeli kérdésre. (1 pont)



4. Indítsunk az ábrán látható G gráf d csúcsából szélességi bejárást és határozzuk meg a hozzá tartozó szélességi fát. Végrehajtható-e a fent említett BFS úgy, hogy bc faél legyen?

   Az órán tanultak szerint végrehajtjuk a szélességi bejárást. Az ábrán az egyes csúcsok mellett látható szám az elérési (és az ezzel azonos befejezési) sorrendet mutatja, a megvastagított élek pedig a faélek: ezek mentén érjük el a korábban elért csúcsból a később elértet. (7 pont)
   Az órán azt is tanították, hogy a BFS fa egy legrövidebb utak fája a gyökérből. Ezért a b és c csúcsok távolsága d-től egyaránt 2. Ha azonban bc faél lenne egy d-ből induló BFS bejárás után, akkor $dist(d, b) \neq dist(d, c)$ lenne, ami nem igaz. Tehát bc nem lehet d-ből indított széességi bejárás után faél. (3 pont)

5. A mellékelt táblázat a Dijkstra algoritmus lefutását mutatja a G irányítatlan gráfon. Az egyes sorok az adott fázis utáni (r, ℓ)-felső becsléseket adják meg. Határozzuk meg, milyen sorrendben kerültek be az egyes csúcsok a KÉSZ halmazba, azaz adjuk meg G csúcsainak az algoritmus által meghatározott $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sorrendjét!

a	b	c	d	e
∞	∞	∞	0	∞
42	24	7	0	∞
33	16	7	0	77
24	16	7	0	18
22	16	7	0	18

Az órán tanultak szerint a KÉSZ halmazba nem tartozó csúcsok közül mindig az a csúcs (vagy azon csúcsok egyike) kerül be a KÉSZ halmazba, amelyikre a legkisebb az (r, ℓ)-felső becslés. (2 pont)
Ezért a táblázat minden becslést tartalmazó sorából ki kell választani a legkisebb elemet azon elemek közül, amiknek az oszlopából még nem választottunk egyetlen elemet sem legkisebbnek. Az így meghatározott elemeket bekereteztük a jobb oldalon látható táblázatban. (6 pont)
Mindezek alapján a G gráf csúcsai d, c, b, e, a sorrendben kerültek be a KÉSZ halmazba. (2 pont)

a	b	c	d	e
∞	∞	∞	$\boxed{0}$	∞
42	24	$\boxed{7}$	0	∞
33	$\boxed{16}$	7	0	77
24	16	7	0	$\boxed{18}$
$\boxed{22}$	16	7	0	18

$\boxed{\star}$ Legyen $G = (V, E)$ véges, irányítatlan gráf. Tegyük fel, hogy a $k : E \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvényre ugyanúgy 14 a minimális költségű feszítőfa költsége, mint a k' költségfüggvényre, ahol $k'(e) = 2k(e) - 1$ a G minden e élére. Mennyi a minimális költségű feszítőfa költsége a $k''(e) = 2k(e) + 1$ képlettel megadott k'' költségfüggvényre?

Az órán azt tanították, hogy a Kruskal-algoritmus outputja minimális költségű feszítőfa. (1 pont)
A Kruskal-algoritmus az élekről a költségek nemcsökkenő sorrendjében, mohón dönti el, hogy beveszi-e az adott élt az outputba vagy sem. (1 pont)
Ha G éleit a k költségfüggvény szerint nemcsökkenő sorrendbe rendezzük, akkor ugyanez a sorrend a k' és a k'' költségfüggvényekre is nemcsökkenő sorrend lesz. (1 pont)
Ezért a Kruskal-algoritmusnak a k költségfüggvényre megtalált outputja minimális költségű feszítőfa lesz a k' és a k'' költségfüggvényekre is. (2 pont)
Legyen F ez az output. Ekkor

$$14 = k'(F) = \sum_{e \in F} k'(e) = \sum_{e \in F} (2k(e) - 1) = \left(\sum_{e \in F} 2k(e) \right) - |F| = 2k(F) - |F| = 28 - |F|\ ,$$

azaz $|F| = 14$. (3 pont)
Ebből viszont

$$k''(F) = \sum_{e \in F} k''(e) = \sum_{e \in F} (2k(e) + 1) = \left(\sum_{e \in F} 2k(e) \right) + |F| = 2k(F) + |F| = 28 + 14 = 42$$

a feladat kérdésére a válasz. (2 pont)